

質問内容

$y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ

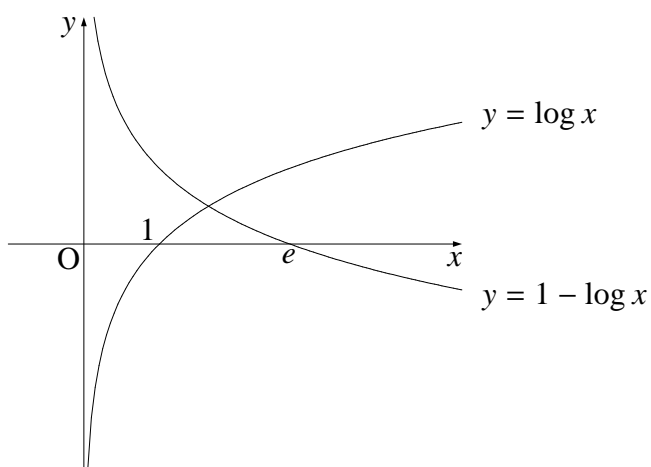
上記のような問題が分かりません。 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ のグラフがかけません。どうやったらいいですか？

こんにちは、河見賢司です。積分の問題ですね。

たまに勘違いしている人がいるんですけど、面積を求めよとか体積を求めよといった問題では、グラフは微分をして丁寧に書く必要はありません。グラフの上下関係さえわかったら十分です。(← 教えている生徒からの質問なので、少し厳しい口調で書きました)

で、 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ がどうなるかということをお話していきます。まず、真数条件より $x > 0$ という条件がありますので、 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ の正負は、分母は常に正なので、分子の $(1 - \log x) \log x$ だけによって決まってきます。

ここで、 $y = \log x$ と $y = 1 - \log x$ のグラフをかくと



上図から判断すると、

$x < 1$ のとき $\log x < 0$ で $1 - \log x > 0$ なので、 $\log x(1 - \log x) < 0$

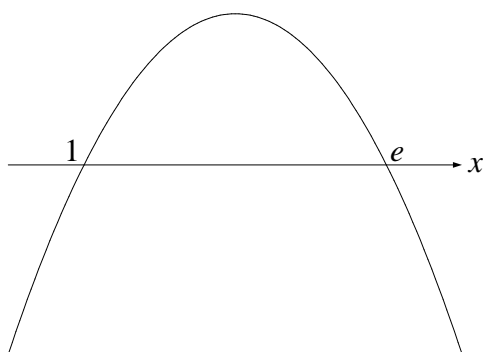
$1 < x < e$ のとき $\log x > 0$ で $1 - \log x > 0$ なので、 $\log x(1 - \log x) > 0$

$e < x$ のとき $\log x > 0$ で $1 - \log x < 0$ なので、 $\log x(1 - \log x) < 0$ となります。

$y = f(x) = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ も $(1 - \log x) \log x$ の正負と一致するので、

$x < 1$ のとき、 $f(x) < 0$
 $1 < x < e$ のとき、 $f(x) > 0$
 $e < x$ のとき、 $f(x) < 0$ となります。

このことから、 $y = f(x)$ のグラフをかくと (← あくまで、 x 軸との上下関係のみに着目したグラフです。どんなグラフであれ x 軸より上側にあれば面積を求める計算式は同じになります。)



ここまできたら、 $y = f(x)$ と x 軸とによって囲まれば部分の面積は簡単だよな。
求める部分の面積を S とすると、 $S = \int_1^e f(x) dx$ となります。

後は、この定積分の計算をするだけなんですけど、この計算が少し難しい(と言っても受験生なら常識としておいて欲しいんですけど…)

この定積分を計算するには特殊基本関数という知識が必要です。

特殊基本関数

$$\int f'(x) \{f(x)\}^n = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} \text{ となる。}$$

ちょっと面倒なので、積分定数の C は書いていません。特殊基本関数については、本当に重要なので、また後ほど機会を見つけて解説したいと思いますが、なぜ成り立つかの確認は右側の $\frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1}$ を微分したら、確かに $f'(x) \{f(x)\}^n$ になっていることから確認できますよ。(← 特殊基本関数については、また後日解説します)

学校で、部分積分の勉強をしたと思いますが、実は実際の大学受験で部分積分が出題されることはあまりありません(もちろんあることにはありますが、圧倒的に特殊基本関数になっている場合の方が多いです)

定積分でインテグラルの中身が積の形になっている時、いきなり部分積分をするのではなく、必ず特殊基本関数になっていないか確認をするようにしてください。部分積分はメンドウですが、特殊基本関数なら本当に簡単に解くことができます。

このことを踏まえて、解答に進みたいと思います。

【解答】

$y = f(x) = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$ は $1 \leq x \leq e$ の範囲でのみ $y \geq 0$ となるので、 $y = f(x)$ と x 軸とによって囲まれた部分の面積 S は、 $S = \int_1^e \frac{(1 - \log x) \log x}{x} dx$ となる。

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^e \frac{(1 - \log x) \log x}{x} dx \\
 &= \int_1^e \frac{\log x - (\log x)^2}{x} dx \\
 &= \int_1^e \left(\frac{\log x}{x} - \frac{(\log x)^2}{x} \right) dx \\
 &= \int_1^e \left((\log x)' \log x - (\log x)' (\log x)^2 \right) dx \leftarrow \frac{1}{x} = (\log x)' \text{ 特殊基本関数が見える形になった!} \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 - \frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{6} \leftarrow \text{これが答え}
 \end{aligned}$$

特殊基本関数って知らない人が多いと思います。なぜか知らないけど、高校では解説をしないところが多いんですよね。積分の中身が積の形になっているとき、教科書などに載っている定積分の計算では部分積分でしか解けないことが多いのですが、実際の大学受験で面積や体積を求めるときの定積分の計算は、特殊基本関数となっていることが圧倒的に多く、また部分積分で解くよりも特殊基本関数で解いて方が、本当に圧倒的に短時間に解くことができます。

今回は、おおざっぱにしか説明していませんが、この特殊基本関数は本当に重要なのでまた別の機会に紹介したいと思います。

今回、理解してほしい内容としては、面積や体積を求めるときのグラフはまじめに微分をして求める必要はないということです。

面積や体積で必要なのは、グラフの正確な形でなく上下関係だけです。そういったことをしっかりと頭にいれながら問題を解くようにしてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com