

「ルールが分かれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

質問内容

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$ が分かりません。どうやって計算するのですか？

回答

まず、問題に進む前に \lim の解き方を軽く話します。

\lim の解き方の基本としては、代入できるときは代入します。例えば $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ なら、 $x = 2$ を代入して $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$ となります。

*今、代入できるときは代入すると言いました。本当は、もっと丁寧に考えないといけないのです。ですが、これは大学に入ってからです。高校数学の範囲では代入すると考えてもらっていいですよ。

「 \lim の問題が出てきたら、代入できるときは代入して解いていく」ということをまず覚えてください。

代入できるときは、代入すると言いましたが実はほとんどの場合代入できます。 \lim の問題で代入できないのは分母が0になるときぐらいです。数学で分母が0になるなんてことはあり得ないよね。だから、代入して分母が0になるときは、代入して解いていくということはできません。

そこで今から、代入して分母が0になるときはどうなるか少し考えてみます。

$\frac{1}{0.1} = 10$, $\frac{1}{0.01} = 100$, $\frac{1}{0.001} = 1000$, $\frac{1}{0.0001} = 10000$ これで分かったと思うけど、分

母の値が0に近づけば近づくほど全体としてほ大きくなります。

0に近づくといっても $0.1 \rightarrow 0.01 \rightarrow 0.001$ というふうにプラスから近づくときと、 $-0.1 \rightarrow -0.01 \rightarrow -0.001$ とマイナスから近づくときの2パターンあります。プラスから近づくときは $+\infty$ となり、マイナスから近づくときは $-\infty$ となります。

分母が0になるときの極限

代入したら分母が0になり、分子が0以外の値になるとき極限は、 $\pm\infty$ となる。

ここで、ちょっと注意なんだけど代入をして分母が0になるからと言って必ず極限値が $\pm\infty$ となるとは限らないよ。これが成立するのは分子が0以外の値になるときに限りません。分母も分子も代入してみて0になるときは、収束することもあるし、そうでないこともあります。

例えば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ は $x = 0$ を代入したら分子も分母も0となりますが、この極限値は0です。

また、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ これも $x = 0$ を代入したら分子も分母も0となりますが、この極限値は1です (* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は覚えておかないとダメな公式ですよ)。

このように分母が0でも、分子が0なら収束することもあります。これだけは間違いないようにしてください。

それでは今回の問題に進みます。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$$

この問題を解くのですが $\lim_{x \rightarrow +0}$ とは x を正の方から0に近づけなさいよ、ということです。

とりあえず+0の+は無視して考えると、代入したとき分母は0で分子は1と0以外の値をとるのでこの極限値は $+\infty$ か $-\infty$ です。(代入して分母が0、分子が0以外の値になったら、その時点で極限は ∞ か $-\infty$ しかないんだよね)

あとは、プラスかマイナスかどっちになるか考えた方がいいのですが、今回の問題は +0 と x を正の方から 0 に近づけるのですから当然 x は正です。分子の値も 1 と正の値をとるので極限值は + の方です。

このことから $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$ です。

これで分かってもらえたでしょうか？lim のことをまったく知らないという人にも理解してもらうために丁寧に書いたのですが、人によってはすこしまわりくどく感じたかもしれません。こういった類の問題が苦手という人が多いですが、分母が 0 になるときの極限值は $+\infty$ か $-\infty$ しかないんです。ですから正負さえ判断できたら簡単に答えがでてきます。今回、勉強したことを使って次の問題を解いてみてください。

問題

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2-1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x(x+1)} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x(x+1)}$$

【解答】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1}$$

$x = 1$ を代入したとき (分子) = 1, (分母) = $1 - 1 = 0$ だから、 $+\infty$ か $-\infty$ になります。

ここで分子は 1 より、当然正。

分母の $x - 1$ は $x \rightarrow 1 - 0$ なんだから x は 1 より小さい値から 1 に近づけます。ということは x の値は 1 より小さい。 $x - 1$ の正負は 1 より小さいものから 1 を引くんだからマイナスになります。

分子がプラスで、分母がマイナス。全体でマイナスとなります。

$$\text{よって答えは } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2 - 1}$$

$x = 1$ を代入したとき (分子) = -2 , (分母) = $1^2 - 1 = 0$ だから、 $+\infty$ か $-\infty$ になります。

ここで分子は -2 より、マイナスとなる。

分母の $x^2 - 1$ は $x \rightarrow 1+0$ と 1 より大きい方から 1 に近づけます。 1 より大きいんだから当然 x^2 も 1 より大きくなるので、分母の $x^2 - 1$ は 1 より大きいものから 1 を引くんだから当然プラス。

分子がマイナスで、分母がプラス。全体でマイナスとなります。

よって答えは $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2 - 1} = -\infty$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x(x+1)}$$

$x = 0$ を代入したとき (分子) = 1 , (分母) = $0(0+1) = 0$ だから、 $+\infty$ か $-\infty$ になります。

ここで分子は 1 より当然プラス。

分母は $x(x+1)$ ですが、 $x \rightarrow -0$ と x をマイナスの方から 0 に近づけるのだから x はマイナス、 $x+1$ はプラス。よってマイナスとプラスを掛け合わせるので、分母 $x(x+1)$ はマイナスになります。

分子がプラスで、分母がマイナス。全体でマイナスとなります。

よって答えは $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x(x+1)} = -\infty$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x(x+1)}$$

$x = -1$ を代入したとき (分子) = 1 , (分母) = $-1(-1+1) = 0$ だから、 $+\infty$ か $-\infty$ になります。

ここで分子は 1 より当然プラス。

分母は $x(x+1)$ ですが、 $x \rightarrow -1-0$ と x を -1 より小さい値の方から -1 に近づける。ということは x の値は -1 より小さい。 -1 より小さいものに $+1$ をしてもマイナス。よって

$x+1$ はマイナス、当然 x も $x \cong -1$ よりマイナス。よってマイナスとマイナスを掛け合わせるので、分母 $x(x+1)$ はプラスになります。

分子がプラスで、分母がプラス。全体でプラスとなります。

よって答えは $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x(x+1)} = \infty$

今回の分母が0になるパターンは、受験ではあまり出てきません。ですが、これらの極限は実はグラフをかくときに必要になるんです。

ただ、このプリントで分かったと思うけど、分母が0になるときの極限は ∞ か $-\infty$ です。符号を考えたらいいだけなので、そこまで難しくくないよね。慣れたら簡単ですよ。

理解できる人はすんなり理解するんですが、そうでない人は少し時間がかかります。でも、理解できたら「そんな簡単なことだったんだ」と思う人が多いです。いずれにせよ、重要どころなのでしっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com