

高校2年生Oさんからの質問です。

質問内容

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$  が分かりません。どうやって計算するのですか？

## 回答

まず、問題に進む前に  $\lim$  の解き方をかるく話します。

$\lim$  の解き方の基本としては、代入できるときは代入します。例えば  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$  なら、 $x = 2$  を代入して  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$  となります。

「 $\lim$  の問題が出てきたら、代入できるときは代入して解いていく」ということをまず覚えてください。

代入できるときは、代入すると言いましたが実はほとんどの場合代入できます。 $\lim$  の問題で代入できないのは分母が0になるときです。数学で分母が0になるなんてことはあり得ないよね。だから、代入して分母が0になるときは、代入して解いていくということとはできません。

で、代入して分母が0になるときはどうなるか少し考えてみます。

$\frac{1}{0.1} = 10$ ,  $\frac{1}{0.01} = 100$ ,  $\frac{1}{0.001} = 1000$ ,  $\frac{1}{0.0001} = 10000$  これで見分かったと思うけど、分母の値が0に近づけば近づくほど全体としてほ大きくなります。

0に近づくといっても  $0.1 \rightarrow 0.01 \rightarrow 0.001$  というふうにプラスから近づくときと、 $-0.1 \rightarrow -0.01 \rightarrow -0.001$  とマイナスから近づくときの2パターンあります。プラスから近づくときは  $+\infty$  となり、マイナスから近づくときは  $-\infty$  となります。

分母が0になるときの極限值

代入したら分母が0になり、分子が0以外の値になるとき極限値は、 $\pm\infty$  となる。

ここで、ちょっと注意なんだけど代入をして分母が0になるからと言って必ず極限値が  $\pm\infty$  となるとは限らないよ。これが成立するのは分子が0以外の値になるときに限りです。分母も分子も代入してみて0になるときは、収束することもあるし、そうでないこともあります。

例えば  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$  は  $x = 0$  を代入したら分子も分母も 0 となりますが、この極限値は 0 です。

また、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$  これも  $x = 0$  を代入したら分子も分母も 0 となりますが、この極限値は  $\pm\infty$  です。

このように分母が 0 でも、分子が 0 なら収束することもあります。これだけは間違いのないようにしてください。

それでは今回の問題に進みます。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$$

この問題を解くのですが  $\lim_{x \rightarrow +0}$  とは  $x$  を正の方から 0 に近づけなさいよ、という命令です。

とりあえず +0 の + は無視して考えると、代入したとき分母は 0 で分子は 1 と 0 以外の値をとるのでこの極限値は  $+\infty$  か  $-\infty$  です。

あとは、どちらになるか考えたらいいのですが、今回の問題は +0 と  $x$  を正の方から 0 に近づけるのですから当然  $x$  は正です。分子の値も 1 と正の値をとるので極限値は + の方です。

このことから  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$  です。

これで分かってもらえたでしょうか？lim のことをまったく知らないという人にも理解してもらうために丁寧に書いたので、人によってはすこしまわりくどく感じたかもしれませんが、こういった類の問題が苦手という人が多いですが、分母が 0 になるときの極限値は  $+\infty$  か  $-\infty$  しかないんです。ですから正負さえ判断できたら簡単に答えがでてきます。今回、勉強したことを使って次の問題を解いてみてください。

#### 問題

次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2-1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x(x+1)} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x(x+1)}$$

【解答】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1}$$

$x = 1$  を代入したとき (分子) = 1, (分母) =  $1 - 1 = 0$  だから、 $+\infty$  か  $-\infty$  になります。

ここで分子は 1 より、当然正。

分母の  $x - 1$  は  $x \rightarrow 1 - 0$  なんだから  $x$  は 1 より小さい値から 1 に近づけます。ということは  $x$  の値は 1 より小さい。  $x - 1$  の正負は 1 より小さいものから 1 を引くんだからマイナスになります。

分子がプラスで、分母がマイナス。全体でマイナスとなります。

$$\text{よって答えは } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2 - 1}$$

$x = 1$  を代入したとき (分子) =  $-2$ , (分母) =  $1^2 - 1 = 0$  だから、 $+\infty$  か  $-\infty$  になります。

ここで分子は  $-2$  より、マイナスとなる。

分母の  $x^2 - 1$  は  $x \rightarrow 1 + 0$  と 1 より大きい方から 1 に近づけます。1 より大きいんだから当然  $x^2$  も 1 より大きくなるので、分母の  $x^2 - 1$  は 1 より大きいものから 1 を引くんだから当然プラス。

分子がマイナスで、分母がプラス。全体でマイナスとなります。

$$\text{よって答えは } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-2x}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x(x+1)}$$

$x = 0$  を代入したとき (分子) = 1, (分母) =  $0(0 + 1) = 0$  だから、 $+\infty$  か  $-\infty$  になります。

ここで分子は 1 より当然プラス。

分母は  $x(x+1)$  ですが、 $x \rightarrow -0$  と  $x$  をマイナスの方から 0 に近づけるのだから  $x$  はマイナス、 $x+1$  はプラス。よってマイナスとプラスを掛け合わせるので、分母  $x(x+1)$  はマ

マイナスになります。

分子がプラスで、分母がマイナス。全体でマイナスとなります。

$$\text{よって答えは } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} = -\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x(x+1)}$$

$x = 0$  を代入したとき (分子) = 1, (分母) =  $-1(-1+1) = 0$  だから、 $+\infty$  か  $-\infty$  になります。

ここで分子は 1 より当然プラス。

分母は  $x(x+1)$  ですが、 $x \rightarrow -1-0$  と  $x$  を  $-1$  より小さい値の方から  $-1$  に近づける。ということは  $x$  の値は  $-1$  より小さい。  $-1$  より小さいものに  $+1$  をしてもマイナス。よって  $x+1$  はマイナス、当然  $x$  も  $x \cong -1$  よりマイナス。よってマイナスとマイナスを掛け合わせるので、分母  $x(x+1)$  はプラスになります。

分子がプラスで、分母がプラス。全体でプラスとなります。

$$\text{よって答えは } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} = \infty$$

今回の分母が 0 になるパターンは、受験ではあまり出てきません。ですが、これらの極限は実はグラフをかくときに必要になるんです。要はプラスかマイナスさえ分かったら答えがでます。理解できる人はすんなり理解するんですが、そうでない人は少し時間がかかります。でも、理解できたら「そんな簡単なことだったんだ」と思う人が多いです。いずれにせよ、重要なところなのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値 45 から 55 ! 高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)