

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

定積分と不等式をやっているのですが、証明の立て方を教えてくださいませんか？

回答

ちょっとこれだけの質問内容ではなんともいえないのですが、以下のような問題が分からないということでしょうか？

もし間違っていたら連絡ください。

問題

次の式を証明せよ

$$e \log 2 < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < e^2 \log 2$$

【解説】

何も知らない高校生に解かせると、ほとんどの人が中の $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ の計算をしようとしています。

この問題は僕が今ちょっと作ったものなので、ひょっとしたら定積分の計算ができるかもしれませんが、通常、不等式の証明ででてくる定積分は計算できません。

「不等式の証明ででてくる定積分の計算はできない（ことがほとんど）」まずはこのことを覚えておいてください。

計算できないんだったらどうすればいいの？と思うかもしれませんが、不等式を証明するんだから定積分の値そのものがずばり求めることができなくても、大雑把な範囲でいいから求めることができたなら、不等式では証明できるよね。

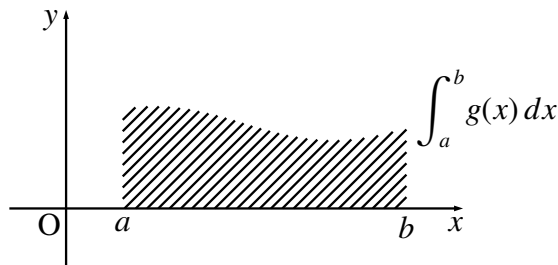
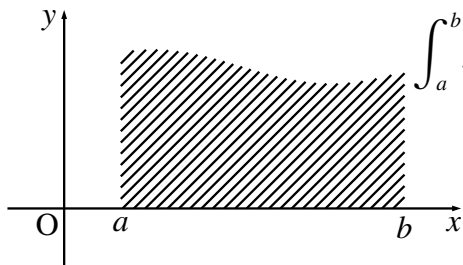
定積分を含んだ不等式の計算は自分で大雑把に不等式を作っていけないといけません。定積分を含んだ不等式の作り方をまずは覚えていってください。

定積分と不等式

閉区間 $[a, b]$ で、 $f(x) \geq g(x)$ で、常には $f(x) = g(x)$ でないとき

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ は面積を考えれば明らかだね。



$\int_a^b f(x) dx$ っていうのは上記のグラフの斜線部の面積、

当然 $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ が成立しているのは分かるよね。

また、 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ と等号が成立するのは、 $a \leq x \leq b$ において $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフがまったく同じときです。まったく同じときのみ等号が成立し

ます。

ですが、まったく同じグラフとなることは少ないので、ほとんどの場合、等号は成立しませんよ。

ここからは、この性質を使って証明していただくだけです。いきなり解答に進みます。なぜこうなるかは解答の後で解説します。

問題

次の式を証明せよ

$$e \log 2 < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < e^2 \log 2$$

【解答】

$y = e^x$ は $1 \leq x \leq 2$ ◀ 今回の積分区間は 1 から 2 なので $1 \leq x \leq 2$ となる において増加関数

よって $e^1 \leq e^x \leq e^2$ となる。

↑ $y = e^x$ は $1 \leq x \leq 2$ において増加関数なんだから $x = 1$ のときが一番小さくて、 $x = 2$ のときが一番大きくなる

$$e \leq e^x \leq e^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{x} \leq \frac{e^x}{x} \leq \frac{e^2}{x}$$

↑ 分母分子を x で割った。 $1 \leq x \leq 2$ の範囲なので不等号の向きは変わらない

$x = 1$ のとき、 $\frac{e}{x} = e$, $\frac{e^2}{x} = e^2$ より、 $1 \leq x \leq 2$ において $\frac{e}{x}$ と $\frac{e^2}{x}$ が常に $\frac{e}{x} = \frac{e^2}{x}$ となることはない。よって、積分すると等号が外れる。

↑ 常に等しくないことは明らかです。いきなり明らかと書いても大丈夫です。ただ、上記のようにある具体的なひとつの x に対して、 y が違うということを書いて、常に等しくなることはない、と書きます。この書き方が、こういった問題の一番多い解答の書き方です。

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{e}{x} dx < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < \int_1^2 \frac{e^2}{x} dx \quad \blacktriangleleft \text{インテグラルをつけた}$$

$$\Leftrightarrow e \int_1^2 \frac{1}{x} dx < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < e^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow e \left[\log x \right]_1^2 < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < e^2 \left[\log x \right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow e \log 2 < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < e^2 \log 2 //$$

今回のような問題は、上記のようにして自分で不等式を作っていきます。不等式の作り方なんですがこの問題では $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ となっていたましたが、インテグラルの中身の $\frac{e^x}{x}$ に関する不等式をなんとか作っていきます。

多くの場合インテグラルの中身は $f(x)g(x)$ という2つの関数の積になっています。どちらかが積分区間において単調増加、単調減少となっている場合が多いので、それを利用して不等式を作ります。

例えば、積分区間が $a \leq x \leq b$ でその区間において $f(x)$ が単調増加なら、 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ という不等式ができますし、積分区間が $a \leq x \leq b$ でその区間において $g(x)$ が単調減少なら、 $g(b) \leq g(x) \leq g(a)$ という不等式ができます。

あとは、これを利用して解いていくだけです。

今回の問題では、 $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ でした。インテグラルの中身は $\frac{e^x}{x} = e^x \cdot \frac{1}{x}$ と変形できます。

$y = e^x$ は単調増加、 $y = \frac{1}{x}$ は単調減少です。今回は $y = e^x$ が単調増加であることを使って問題を解いていきました。

なぜ、 $y = e^x$ を利用するの？と聞かれることがありますが、それは $y = e^x$ を利用したらうまくいき、 $y = \frac{1}{x}$ を利用したらうまくいかないからです。慣れてくると計算する前から分かりますが、慣れるまでは難しいと思います。少し $y = \frac{1}{x}$ の方で解いていきます。

$y = \frac{1}{x}$ は $1 \leq x \leq 2$ において減少関数。

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{2} \leq \frac{e^x}{x} \leq e^x \quad \blacktriangleleft \text{全ての辺に } e^x \text{ をかけた}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{e^x}{2} dx < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < \int_1^2 e^x dx \quad \blacktriangleleft \text{インテグラルをつけた}$$

ここからどう解いていっても、解答の形になってくれそうにない …

ここまですれば気づくと思います。最初のうちはどちらを使うか難しいと思いますが、ただか2回やればいいだけです。とりあえずうまくいきそうな方を解いてみてそれでうまくいかなかったら違う方をでやってみる、そんな感じでいいと思います。

この不等式と方程式の問題なのですが、学校では適当にほんのさわりの部分だけを解説するところが多いのですが、入試には頻出です。

慣れてくれば分かると思いますが、この類の問題はほとんどワンパターンで解けますし、積分の問題にしては計算量が短いので、積分の中では比較的得点しやすいところだと思います。とは言っても、ほとんど見たこともないという人が多いと思いますので、しっかりと勉強しておいてください。

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司