

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$
ってどう計算したらいいのですか？問題集に答えが書いてあるんですけど、何を言っているのかわかりません。

回答

たしかに難しいですね。これに似た問題、僕も受験生のときに解いて苦労した記憶があります。

問題集には、誘導もなしに「 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ を計算せよ」と載っていたようですが、こういった問題は普通誘導がつくと思います。次のような誘導が付いている場合が多いですよ。

問題

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \text{ とする。}$$

- (1)  $I_1 = I_2$ であることを示せ。
- (2)  $I_1$  と  $I_2$  の値を求めよ。

この問題をどう解くのかな？と思うかもしれませんが、 $I_1$  と  $I_2$  は  $\sin x$  と  $\cos x$  が入れ替わったものだよ。  $I_1$  の  $\sin x$  に  $\cos x$  を  $\cos x$  に  $\sin x$  を入れたら  $I_2$  になるよね。

そこで次のことを覚えておいてください。

定積分の有名な性質

積分区間が0から $\frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x) dx$$

は $\sin x$ と $\cos x$ の値を入れ替えても値は変わらない。

\*  $f(\sin x, \cos x)$ とは式の変数が $\sin x$ と $\cos x$ のみである式のこと

上記の性質が成り立っているということは簡単に説明がつきますよ。 $x = \frac{\pi}{2} - t$ と置き換えて置換積分をしたら導くことができます。

「なぜそう置換するの?」と聞かれることがあります、「こう解いたらうまくいくから」としか伝えようがありません。数学って、こんなことが多いですよ。では、これを使って上記の性質の証明をしてみます。

$x = \frac{\pi}{2} - t$ とする。 $dx = -dt$ となり、 $x$ の積分区間は0から $\frac{\pi}{2}$ のとき、 $t$ の積分区間は $\frac{\pi}{2}$ から0となるので、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) (-dt) \quad \leftarrow x = \frac{\pi}{2} - t \text{で置換積分をした} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt \quad \leftarrow \text{積分区間を入れ替えてマイナスを消去した} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t, \sin t) dt \quad \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \text{より} \end{aligned}$$

これで、 $\sin x$  と  $\cos x$  を入れ替えても同じになるということは理解できたよね。この性質を使った問題は本当によく出題されます。与式が  $\sin x, \cos x$  のみの式で、積分区間が  $0$  から  $\frac{\pi}{2}$  のときはこの性質が使えるんじゃないかな?と考えるようにしてください。

では、問題に戻ります。少し問題とのスペースができたので、もう一度問題を書きおきます。

問題

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \text{ とする。}$$

- (1)  $I_1 = I_2$  であることを示せ。
- (2)  $I_1$  と  $I_2$  の値を求めよ。

【解答】

(1) は、先ほど説明した性質を使えば証明できるので簡単だね。それから (2) なんだけど、どうやって解いていくのかといえば  $I_1$  と  $I_2$  と 2 つの変数を決定するには、 $I_1$  と  $I_2$  に関する関係式が 2 つ必要だね。

(1) で  $I_1 = I_2$  という関係式をひとつ導いたから、あとひとつ関係式を導けたらいいんだけど、どうやったら導けるんだろう？

よく分からないけど、とりあえず  $I_1 + I_2$  をやってみます。

なぜ  $I_1 + I_2$  をするのか分からない人もいますが、 $I_1$  と  $I_2$  は積分区間が同じで、しかも分母が  $\sin x + \cos x$  と同じなんだからとりあえず  $I_1 + I_2$  をするか  $I_1 - I_2$  をするかくらいしかないんじゃない？

それにこの問題は (1) で  $I_1 = I_2$  を導きなさいとしっかりと誘導してくれているけど、もうひとつの  $I_1$  と  $I_2$  の関係式はノーヒントで出題されています。ノーヒントで出題される

くらいなんかだと  $I_1$  と  $I_2$  の関係式は極めて簡単なものです。そう考えると、とりあえずたすかひくくらいしかないよね？

それでは、解答に進みます。

【解答】

(1)

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

ここで  $x = \frac{\pi}{2} - t$  とする。

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = I_2$$

\*計算はかなり省略しました。各自やっておいてください。

(2)

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$I_1 = I_2 \text{ と } I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} \text{ より、 } I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$$

質問によるとノーヒントで、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  を求めなさいと出てきたようで

すが、ほとんどの場合で先ほどの問題のような誘導がついてくれています。

ですが、実際問題集に出題されたようにノーヒントで出題される可能性もなくはないです。

慣れてくるとワンパターンで解けて簡単なのでしっかりと解き方を覚えておいてください。

それでは、がんばってください。

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司