質問内容

予備校の問題でいきなり「曲線の長さを求めよ」という問題が出題されました。曲線の長さってどういうふうに求めるのですか？

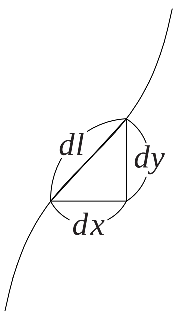
こんにちは、予備校で曲線の長さに関する問題が出たとのことですが、厳密にいえば「曲線の長さ」を求めるのは高校数学の範囲外です。ですが、数年前までは範囲内であったことと、考え方自体もそれほど難しくないので、出題してくる大学もたまにあります。予備校でも、そういったことを考え、テキストに載せていたのだと思います。

曲線の長さは、次のようにしたら求めることができます。

曲線の長さ

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

なぜ、曲線の長さが上記のようになるかは、次のように考えたら分かりやすいと思います。



曲線の長さの求め方は、左図をみれば簡単だと思います。積分って、要するに微小区間で考えて、その微小区間を足し合わせることにより全体を求めていくことなんだよね。

左図を見てもらえば分かると思いますが、左図の微小区間 dl は本当は曲線なんだけど、微小区間で考えているので直線と見ても大丈夫です。ですから、微小区間 dl は三平方の定理を使って $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ となります。

微小区間の長さが $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ なんだから、後はこれを足し合わせたら全体の曲線の長さになります。ちなみに、意外に知らない人が多いのですがインテグラルとは、足し合わせるという意味です。

曲線の長さ l は dl を足し合わせたらいいんだから $l = \int dl$ となります。

後は、x で積分したいときは $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ と式変形をして、媒介

変数表示などで表されたときはθで微分していきますが、このときは$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$と式変形をしていきます。

たまに、$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$や$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$がなぜ成立するのか分からないという人がいますが、普通に計算したら成り立ちますよね。dyやdxなんかも、普通の文字のように計算していってもOKですよ。例えば、$\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = dy$となります。

この曲線の長さなんですが、式を立てるところまではごくごく基本的なんですが、そこからの定積分の計算が面倒な場合が多いです。定積分の計算は、一般にルートが入ってくると計算が無理だったよね？もちろんルートの中身を置換積分したりしてうまく解けることもあったかと思いますが…

曲線の長さに関しては、式変形をすることにより次の２パターンになることが多いです。こうなるんじゃないか？と考えなら計算をするようにしてください。

① 計算をすることにより、ルートの中身が２乗になってくれてルートを外すことができる。

② $\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx$となっている。

このことを注意して、次の「曲線の長さ」に関する問題を解いていってください。

問題

$x = a(1 + \cos\theta)\cos\theta,\ y = a(1 + \cos\theta)\sin\theta$の$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$の曲線の長さを求めよ。

【解説】

先ほどの曲線の長さの公式を適用して解いていきます。今回は$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$の公式を使います。いきなり公式に代入をすると計算が面倒なので、まずはルートの中身の$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$の計算をしてから解いていきます。

では、問題を解いていきます。

$$
\begin{aligned}
x &= a(1+\cos\theta)\,\cos\theta \\
\frac{dx}{d\theta} &= a(1+\cos\theta)'\,\cos\theta + a(1+\cos\theta)\,(\cos\theta)' \quad \text{◀ 積の微分をした} \\
&= a(-\sin\theta)\,\cos\theta + a(1+\cos\theta)\,(-\sin\theta) \\
&= -a\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta - a\sin\theta\cos\theta \\
&= -2a\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta \\
&= -a\sin 2\theta - a\sin\theta \quad \text{◀ } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \text{ より}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= a(1+\cos\theta)\,\sin\theta \\
\frac{dy}{d\theta} &= a(1+\cos\theta)'\,\sin\theta + a(1+\cos\theta)\,(\sin\theta)' \quad \text{◀ 積の微分をした} \\
&= a(-\sin\theta)\,\sin\theta + a(1+\cos\theta)\,\cos\theta \\
&= -a\sin^2\theta + a\cos\theta + a\cos^2\theta \\
&= a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a\cos\theta \\
&= a\cos 2\theta + a\cos\theta \quad \text{◀ } \cos^2\theta - a\sin^2\theta = \cos 2\theta \text{ より}
\end{aligned}
$$

上記の説明で、２倍角の公式にはなかなか気づかない人も多かったと思います。どうやって気付いたのかというと、$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ を結局は計算をしないといけないんだよね。

まずは、$\frac{dx}{d\theta}$ のほうは $\frac{dx}{d\theta} = -2a\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta$ の状態でも２乗しても、それほど計算が面倒になることはないけど、次の $\frac{dy}{d\theta}$ のほうは $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin^2\theta + a\cos\theta + a\cos^2\theta$ を２乗しないといけないんだけど、３項あるから面倒だよね。

で、これはある程度勘も必要になってくるんだけど、
$x = a(1+\cos\theta)\,\cos\theta$ と $y = a(1+\cos\theta)\,\sin\theta$ とよく似た形をしているよね。だったら微分した形もよく似た形になるんじゃない？$\frac{dx}{d\theta}$ は２項で表されていて、$\frac{dy}{d\theta}$ の方が３項であらわされるなんてありえないよね。

そこで、なんか似た式にならないかな？と考えたら「あっ、２倍角が使えるんじゃないかな？」と思いつけるようになります。

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$= (-a\sin 2\theta - a\sin\theta)^2 + (a\cos 2\theta + a\cos\theta)^2$$
$$= a^2\sin^2 2\theta + 2a^2\sin 2\theta\sin\theta + a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2 2\theta + 2a^2\cos 2\theta\cos\theta + a^2\cos^2\theta$$
$$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2a^2(\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$
$$= a^2 + a^2 + 2a^2(\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$ ◀ $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1,\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より
$$= 2a^2(1 + \sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$

とりあえずここまで式変形をできたけどここからまだ考えていかない。先ほど説明しましたが曲線の長さのルートの中身は

① 計算をすることにより、ルートの中身が 2 乗になってくれてルートを外すことができる。

② $\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx$ となっている。

になってくれます。今回は、共通因数はなさそうなのでどうも ① のパターンになりそうです。そこで、どうやって計算をするのかな？と考えるんだけど、$(1+\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\cos\theta)$ を見たらなんか思いつかない？

もっといえば $\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta$ の部分なんだけど、$\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta$ って、cos の加法定理じゃない？加法定理での展開はさんざんやっているので覚えていると思いますが、逆っていうのは意外に気づきにくいですよね？でも、こういった式変形は頻出とは言いませんが、たまに出てくるのでしっかりとおぼえておいてください。

$\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta = \cos(2\theta-\theta)$ ◀ 加法定理より $= \cos\theta$ と式変形できるので、
$2a^2(1 + \sin 2\theta\sin\theta + \cos\theta\cos 2\theta) = 2a^2(1+\cos\theta)$ となります。

で、ここからがまた少し思いつきにくい展開をするのですが、

$$2a^2(1+\cos\theta)$$
$$= 2a^2\left(1 + \cos 2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2a^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)$$ ◀ 2 倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より
$$= 2a^2\,2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

上記の計算なんですけど、言われたら「ああそうだな」と思うかもしれませんが、なかなか気づけませんよね？先ほども言いましたが、ルートの中身は２乗になってくれないと計算ができないんです。で、２乗にするにはどうしたらいいのかな？と考えたら思いつけるようになると思います。

最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、この計算は頻出です。気づけるようになっておいてください。

では、解答に進みます。

【解答】

$$x = a(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= a(1+\cos\theta)'\cos\theta + a(1+\cos\theta)(\cos\theta)' \\ &= a(-\sin\theta)\cos\theta + a(1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -a\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta - a\sin\theta\cos\theta \\ &= -2a\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta \\ &= -a\sin 2\theta - a\sin\theta\end{aligned}$$

$$y = a(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= a(1+\cos\theta)'\sin\theta + a(1+\cos\theta)(\sin\theta)' \\ &= a(-\sin\theta)\sin\theta + a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -a\sin^2\theta + a\cos\theta + a\cos^2\theta \\ &= a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a\cos\theta \\ &= a\cos 2\theta + a\cos\theta\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$= (-a\sin 2\theta - a\sin\theta)^2 + (a\cos 2\theta + a\cos\theta)^2$$
$$= a^2\sin^2 2\theta + 2a^2\sin 2\theta\sin\theta + a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2 2\theta + 2a^2\cos 2\theta\cos\theta + a^2\cos^2\theta$$
$$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2a^2(\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$
$$= a^2 + a^2 + 2a^2(\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$
$$= 2a^2(1 + \sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$$
$$= 2a^2\left(1 + \cos 2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2a^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)$$
$$= 2a^2\,2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

よって、曲線の長さ l は

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \int_0^\pi \left|2a\cos\frac{\theta}{2}\right|$$ ◀ $\sqrt{A^2} = |A|$ より。絶対値を忘れないように

ここで、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき、$\cos\frac{\theta}{2} \geqq 0$ であることを考え

$$= 2|a|\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2|a|\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi$$
$$= 2|a|\,2\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= 4|a|$$ ◀ これが答え

どうでしたか？以上で今回の説明は終わりです。曲線の長さは範囲外なので実際の大学受験に出てくることは少ないですが、問題文に曲線の長さの求め方を示した上で出題されるかもしれません。実際、そのような問題を見たことがあります。

いずれにせよ、今回重要なのは定積分の計算です。少し難しかったかもしれませんが、今

回話した問題は理系の大学であれば、ごくごく標準的な問題です。数学 III の積分は、大学受験では最頻出単元なので、しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com