

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

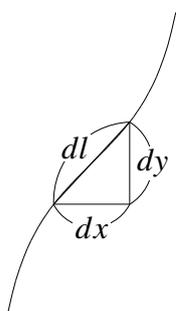
積分の曲線の長さの問題ってどう解けばいいのですか？教えてください。

曲線の長さは、次のようにしたら求めることができます。

曲線の長さについて

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

なぜ、曲線の長さが上記のようになるかは、次のように考えたら分かりやすいと思います。



曲線の長さの求め方は、左図をみれば簡単だと思います。積分って、要するに微小区間で考えて、その微小区間を足し合わせることで全体を求めていくことなんだよね。

左図を見てもらえば分かると思いますが、左図の微小区間 dl は本当は曲線なんだけど、微小区間で考えているので直線と見ても大丈夫です。ですから、微小区間 dl は三平方の定理を使って $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ となります。

微小区間の長さが $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ なんだから、後はこれを足し合わせたら全体の曲

線の長さになります。ちなみに、意外に知らない人が多いのですがインテグラルとは、足し合わせるという意味です。

曲線の長さ l は dl を足し合わせたらいいんだから $l = \int dl$ となります。

後は、 x で積分したいときは $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ と式変形をして、媒介変数表示などで表されたときは θ で微分していきませんが、このときは $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$ と式変形をしていきます。

たまに、 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ や $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$ がなぜ成立するのか分からないという人がいますが、普通に計算したら成り立ちますよね。 dy や dx なんかも、普通の文字のように計算していても OK です。例えば、 $\frac{dy}{dx} dx = dy$ となります。

この曲線の長さなんですが、式を立てるところまではごくごく基本的なんですが、そこからの定積分の計算が面倒な場合が多いです。定積分の計算は、一般にルートが入ってくると計算が無理だったよね？もちろんルートの中身を置換積分したりしてうまく解けることもあったかと思いますが…

曲線の長さに関しては、式変形をすることにより次の2パターンになることが多いです。こうなるんじゃないか？と考えたら計算をするようにしてください。

- ① 計算をすることにより、ルートの中身が2乗になってくれてルートを外すことができる。
- ② $\int f'(x) \{f(x)\}^n dx$ となっている。

このことに注意して、次の「曲線の長さ」に関する問題を解いていってください。

問題

$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$, $y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$ の $(0 \leq \theta \leq \pi)$ の曲線の長さを求めよ。

【解答】

先ほどの曲線の長さの公式を適用して解いていきます。今回は $\int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$ の公式を使います。いきなり公式に代入をすると計算が面倒なので、まずはルートの中身の $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ の計算をしてから解いていきます。

では、問題を解いていきます。

$$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a(1 + \cos \theta)' \cos \theta + a(1 + \cos \theta) (\cos \theta)' \quad \blacktriangleleft \text{積の微分をした} \\ &= a(-\sin \theta) \cos \theta + a(1 + \cos \theta) (-\sin \theta) \\ &= -a \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta - a \sin \theta \cos \theta \\ &= -2a \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \\ &= -a \sin 2\theta - a \sin \theta \quad \blacktriangleleft \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ より} \end{aligned}$$

$$y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= a(1 + \cos \theta)' \sin \theta + a(1 + \cos \theta) (\sin \theta)' \quad \blacktriangleleft \text{積の微分をした} \\ &= a(-\sin \theta) \sin \theta + a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= -a \sin^2 \theta + a \cos \theta + a \cos^2 \theta \\ &= a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a \cos \theta \\ &= a \cos 2\theta + a \cos \theta \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \text{ より} \end{aligned}$$

上記の説明で、2倍角の公式にはなかなか気づかない人も多かったと思います。どうやって気付いたのかというと、 $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ を結局は計算をしないといけないんだよね。

まずは、 $\frac{dx}{d\theta}$ のほうは $\frac{dx}{d\theta} = -2a \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta$ の状態でも 2 乗しても、それほど計算が面倒になることはないけど、次の $\frac{dy}{d\theta}$ のほうは $\frac{dy}{d\theta} = -a \sin^2 \theta + a \cos \theta + a \cos^2 \theta$ を 2 乗しないとイケないんだけど、3 項あるから面倒だよな。

で、これはある程度勘も必要になってくるんだけど、 $x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$ と $y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$ とよく似た形をしているよね。だったら微分した形もよく似た形になるんじゃない？ $\frac{dx}{d\theta}$ は 2 項で表されていて、 $\frac{dy}{d\theta}$ の方が 3 項であらわされるなんてありえないよね。

そこで、なんか似た式にならないかな？と考えたら「あっ、2 倍角が使えるんじゃないかな？」と思いつけるようになります。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\ &= (-a \sin 2\theta - a \sin \theta)^2 + (a \cos 2\theta + a \cos \theta)^2 \\ &= a^2 \sin^2 2\theta + 2a^2 \sin 2\theta \sin \theta + a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 2\theta + 2a^2 \cos 2\theta \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta \\ &= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2a^2(\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \\ &= a^2 + a^2 + 2a^2(\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \quad \leftarrow \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より} \\ &= 2a^2(1 + \sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \end{aligned}$$

とりあえずここまで式変形をできたけどここからまだ考えていかない。先ほど説明しましたが曲線の長さのルートの中身は

- ① 計算をすることにより、ルートの中身が 2 乗になってくれてルートを外すことができる。
- ② $\int f'(x) \{f(x)\}^n dx$ となっている。

になってくれます。今回は、共通因数はなさそうなのでどうも①のパターンになりそうです。そこで、どうやって計算をするのかな？と考えるんだけど、 $(1 + \sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta)$ を見たらなんか思いつかない？

もっといえば $\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta$ の部分なんだけど、 $\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta$ って、 \cos の加法定理じゃない？加法定理での展開はさんざんやっているのだから覚えていると思いますが、逆ってというのは意外に気づきにくいですよ？でも、こういった式変形は頻出とは言いませんが、たまに出てくるのでしっかりとおぼえておいてください。

$\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta = \cos(2\theta - \theta)$ ◀ **加法定理より** $= \cos \theta$ と式変形できるので、 $2a^2(1 + \sin 2\theta \sin \theta + \cos \theta \cos 2\theta) = 2a^2(1 + \cos \theta)$ となります。

で、ここからがまた少し思いつきにくい展開をするのですが、

$$\begin{aligned} & 2a^2(1 + \cos \theta) \\ &= 2a^2 \left(1 + \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2a^2 \left(1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \quad \leftarrow \text{2倍角の公式 } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ より} \\ &= 2a^2 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

上記の計算なんですけど、言われたら「ああそうだな」と思うかもしれませんが、なかなか気づけませんよね？先ほども言いましたが、ルートの中身は2乗になってくれないと計算ができないんです。で、2乗にするにはどうしたらいいのかな？と考えたら思いつけるようになると思います。

最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、この計算は頻出です。気づけるようになっておいてください。では、解答に進みます。

【解答】

$$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a(1 + \cos \theta)' \cos \theta + a(1 + \cos \theta) (\cos \theta)' \\ &= a(-\sin \theta) \cos \theta + a(1 + \cos \theta) (-\sin \theta) \\ &= -a \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta - a \sin \theta \cos \theta \\ &= -2a \sin \theta \cos \theta - a \sin \theta \end{aligned}$$

$$= -a \sin 2\theta - a \sin \theta$$

$$y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= a(1 + \cos \theta)' \sin \theta + a(1 + \cos \theta) (\sin \theta)' \\ &= a(-\sin \theta) \sin \theta + a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= -a \sin^2 \theta + a \cos \theta + a \cos^2 \theta \\ &= a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a \cos \theta \\ &= a \cos 2\theta + a \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\ &= (-a \sin 2\theta - a \sin \theta)^2 + (a \cos 2\theta + a \cos \theta)^2 \\ &= a^2 \sin^2 2\theta + 2a^2 \sin 2\theta \sin \theta + a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 2\theta + 2a^2 \cos 2\theta \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta \\ &= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2a^2(\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \\ &= a^2 + a^2 + 2a^2(\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \\ &= 2a^2(1 + \sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) \\ &= 2a^2\left(1 + \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2a^2\left(1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) \\ &= 2a^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって、曲線の長さ l は

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left| 2a \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \leftarrow \sqrt{A^2} = |A| \text{ より。絶対値を忘れないように} \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ であることを考え

$$\begin{aligned} &= 2|a| \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2|a| \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi \\ &= 2|a| 2 \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 4|a| \quad \leftarrow \text{これが答え} \end{aligned}$$

どうでしたか？以上で今回の説明は終わりです。曲線の長さは式をたてるまでは簡単ですが、それ以降の計算が大変ということが多いです。

今回話した問題は理系の大学であれば、ごくごく標準的な問題です。数学 III の積分は、大学受験では最頻出单元なので、しっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録

しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司