

質問内容

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) dx$$

この計算どうやってすればいいですか？

今回の質問内容は、教えている生徒が学校の宿題で出されたものらしいです。どうやって解くのかな？と分からなかったので私に質問がありました。

この問題、普通に解こうと思えば解けるとは思うけど少し面倒だよね？というか本当に展開するのかな？なんて思ったりしますよね。

実は、こういうふうに感じる事が重要で、数学の問題、特に大学受験レベルの問題になると「単に面倒なだけの問題ってめったに出題されないんです」

そこで、こういうふうに面倒だなと思うときは、その面倒だなと思える解き方で解く前に「他に解き方はないのかな？」と考えるようにしてください。

そのことを踏まえて、今回の問題に戻りますけど

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) dx$$

上記は、単に展開するのではなさそう(それでは単に面倒なだけ)・・・だから、他に解法はないのかな？と考えます。他に解法といっても限られていて、本来だったら上記の式を見た瞬間に気づけるようにしてほしいのですが、これは偶関数、奇関数を使います。

$\int_{-a}^a f(x) dx$ のような形になっているときは、偶関数、奇関数を使うことが多いです。しっかりと頭に入れておいてください。

偶関数、奇関数については多くの人知っていると思うので証明などは割愛します。もし分からなければ数学IIの教科書か参考書を見てください。そこに詳しく書いてあると思います。

偶関数と奇関数

偶関数とは y 軸に対称な関数であり、奇関数とは原点对称な関数である。

偶関数のとき $f(x) = f(-x)$ が成立し、奇関数の時は $f(x) = -f(-x)$ が成立します。

$f(x)$ が偶関数のとき、 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ が成立。

$f(x)$ が奇関数のとき、 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ が成立。

偶関数、奇関数については上記のことを覚えておくだけで十分です。不安な人は繰り返しになりますが教科書等を見て復習をしておくようにしてください。

次に偶関数、奇関数の積がどうなるか考えてみることにします。

まず偶関数どうしの積の場合、関数は偶関数になります。奇関数どうしの積の場合も、関数は偶関数となります。

感覚的に分かると思うけど一応式で説明をすると、

$h(x) = f(x)g(x)$ とします。

まず最初に $f(x)$ と $g(x)$ がともに偶関数のとき、 $f(x) = f(-x)$, $g(x) = g(-x)$ が成立するので、

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= f(x)g(x) \quad \blacktriangleleft f(x) = f(-x), g(x) = g(-x) \text{ より} \\ &= h(x) \quad \blacktriangleleft h(x) = h(-x) \text{ が成立するので、} h(x) \text{ は偶関数！} \end{aligned}$$

次に、一方が偶関数で一方が奇関数のとき、ここでは $f(x)$ を偶関数、 $g(x)$ を奇関数とします。 $f(x)$ が偶関数なので $f(x) = f(-x)$ 、 $g(x)$ が奇関数なので $g(x) = -g(-x)$ が成立します。

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= f(x)\{-g(x)\} \quad \blacktriangleleft f(x) = f(-x), g(x) = -g(-x) \text{ より} \\ &= -h(x) \quad \blacktriangleleft h(x) = -h(-x) \text{ が成立するので、} h(x) \text{ は奇関数！} \end{aligned}$$

最後に、 $f(x)$ と $g(x)$ がともに奇関数のとき、 $f(x) = -f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$ が整理するするの

で、

$$\begin{aligned}h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= -f(x)\{-g(x)\} \leftarrow f(x) = -f(-x), g(x) = -g(-x) \text{ より} \\ &= f(x)g(x) \\ &= h(x) \leftarrow h(x) = h(-x) \text{ が成立するので、} h(x) \text{ は偶関数！}\end{aligned}$$

これを考えて問題を解いていきます。問題のインテグラルの中身は $(\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1)$ ですが、これを展開すると

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) \\ = \sin x \cdot x^2 + \sin x \cdot x + \sin x + \cos x \cdot x^2 + \cos x \cdot x + \cos x\end{aligned}$$

上記のようになります。ここで $\cos x, x^2, 1$ は偶関数、 $\sin x, x$ は奇関数であることと、先ほど説明した偶関数と偶関数の積は偶関数、偶関数と奇関数の積は奇関数、奇関数と奇関数の積は偶関数ということを考えると

$$\begin{aligned}\sin x \cdot x^2 + \sin x \cdot x + \sin x + \cos x \cdot x^2 + \cos x \cdot x + \cos x \\ = (\sin x \cdot x + \cos x \cdot x^2 + \cos x) + (\sin x \cdot x^2 + \sin x + \cos x \cdot x)\end{aligned}$$

と(偶関数)+(奇関数)と変形することができます。

まじめに解いたら上記のように式変形をしていきますが、解答を書くときは次のような式変形で十分だと思います。偶関数と奇関数は頭の中で判別していき、偶関数のみを記入して、奇関数は0になるので無視します。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) dx \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin x + x^2 \cos x + \cos x) dx \leftarrow \text{偶関数、奇関数を考えて展開をした}\end{aligned}$$

ここで \leftarrow 全て一気に計算をするのは面倒なので、ひとつずつ計算をすることにした

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (-\cos x)' \, dx \quad \blacktriangleleft \text{部分積分を利用する} \\
&= \left[-x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot (\sin x)' \, dx \quad \blacktriangleleft \text{部分積分を利用する} \\
&= \left[x^2 \cdot \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad \blacktriangleleft \text{上で求めた } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x = 1 \text{ を代入して計算をした}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

よって

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \sin x + x^2 \cos x + \cos x) \, dx \\
&= 2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4} - 2 + 1 \right) \\
&= \frac{\pi^2}{2} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}
\end{aligned}$$

今回の解説はこれでおしまいです。今回重要なところは偶関数、奇関数に気づけるかどうかというところですが、それ以上に重要な事柄は、「面倒なときは、何か他にうまい解法はないのかな?」と感じられるようにしておいて欲しいことです。

高校生から、「解答をみれば分かるんですけど、自分ではそういった解法なかなか思いつきません」とよく言われますが、今日話したようなことを意識するかしないかですいぶん変わってきます。少し難しいかもしれませんが、今日話した事柄をしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com