質問内容

積分の計算、$\displaystyle\int \log x\,dx$ この計算はどうするのですか？

この問題って本当に基本的で教科書にも絶対に載っているんですけど、最初は難しいですね。実は、これは部分積分を使って解くんです。

部分積分は、積分をする関数が積の形になっているときに使うことが多いです。今回は積分する関数は $\log x$ なので積の形になっていませんが、$\log x = 1 \times \log x$ と式変形をすることで、積の形に変形をしてから解いていきます。

こんなの知らなかったら気づかないよね？数学って頭の良し悪しを言う人が多いけど、知らなかったら解けないといった問題が多いんです。ですから、数学が苦手だという人はまずはひとつずつ解き方を覚えていくようにした方がいいですよ。

それでは、問題に戻りますね。部分積分が苦手だという人もいると思うので、部分積分を少し解説しますね。

部分積分の公式

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

少し長くて難しいけど、部分積分はこの公式を覚えるしかないんです。覚えるしかないと言いましたが、これは部分積分の問題を何問も解いていると自然と覚えられるので、公式を覚えるというより問題を何回も解くことによって、使いこなせるようになってください。

部分積分の公式ですが、実は積の微分から簡単に導けるので、一応導いておきますね。

$$\begin{aligned}
(f(x)\,g(x))' &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \blacktriangleleft \text{積の微分の公式より} \\
f'(x)\,g(x) &= (f(x)\,g(x))' - f(x)\,g'(x) \blacktriangleleft \text{上記の式を変形して、} f'(x)\,g(x) \text{ について解いた} \\
\int f'(x)\,g(x)\,dx &= \int \Big\{(f(x)\,g(x)) - f(x)\,g'(x)\Big\}\,dx \blacktriangleleft \text{両辺を積分した} \\
&= \int (f(x)\,g(x))'\;dx - \int f(x)\,g'(x)\,dx \blacktriangleleft \int (h(x) + i(x))\,dx = \int h(x)dx + \int i(x)dx \text{ より} \\
&= f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g(x)\,dx \blacktriangleleft \text{(注) を見よ。積分の公式が導けた}
\end{aligned}$$

(注) $\int (f(x)g(x))'\,dx$ は $f(x)g(x)$ を微分したものを積分せよということ。微分と積分は逆の関係にあるので $f(x)g(x)$ を微分して積分しても当然 $f(x)g(x)$ になります。

このことより、$\int (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x)$ となります。これは意外によく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

では、部分積分を使う基礎的な問題を１問解いてもらいます。

問題

$\int e^x x\,dx$ を解け

【解説】
これは、積分の中身が積の形になっているので部分積分を使うのかな？と考えます。部分積分はさきほどの公式通り積分を $\int f'(x)g(x)\,dx$ の形にしないといけません。

上記のような形にするには、e^x か x のどちらか一方を積分しないといけません。どっちを積分していいかよく分からないけど、とりあえず x を積分してみます。x を積分すると $\frac{1}{2}x^2$ となります。

$\int e^x x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' e^x\,dx \cdots$ ① となります。

次に、e^x を積分した方を考えてみます。e^x を積分すると e^x です。

$\int e^x x\,dx = \int (e^x)' x\,dx \cdots$ ② となります。

ここで、① と ② どっちを使うのかな？と考えるんだけど、① の方は x^2 と次数が上がっちゃっているよね。数学では、次数が高くなるほど考えにくいので、一般に次数が低い方で計算をしていきます。

このことより、今回は ② の $\int (e^x)' x\,dx$ を使って計算をしていきます。

慣れてくるとすぐに分かるようになると思いますが、部分積分はどちらか一方をまず積分しないといけません。どちらを積分するかの判断の仕方ですが、積分をしてみて難し

くならない方です。今回のように、積分をして次数があがるものと、次数が上がらないものがあるときは、次数が上がらない方を積分して解いていきます。

と言っても、どちらを積分するかの考え方は2通りしかないので、最初のうちはとりあえず両方ともやってみて簡単に解けるほうが正解だというふうにやってもらったらいいと思います。

繰り返しになりますが、慣れてくるとすぐに分かるようになるので心配しなくていいですよ。それでは、問題に戻ります。ここからは、公式通り解いていくだけです。

【解答】

$\displaystyle\int e^x\,x\,dx$

$\displaystyle=\int (e^x)'\,x\,dx$ ◀ e^x を積分して、部分積分を使える形にした

$\displaystyle=e^x\,x-\int e^x\,(x)'\,dx$

⇑ 部分積分の公式 $\displaystyle\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$ に $f(x)=e^x,\ g(x)=e^x$ で摘要した

$\displaystyle=e^x\,x-\int e^x\,dx$ ◀ $(x)'=1$ より

$\displaystyle=e^x\,x-e^x+C$ (C は積分定数) ◀ $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ をした。これが答え

これで、なんとなくかもしれないけど、部分積分を理解したと思います。それでは、今日の本題に進みます。

問題

$\displaystyle\int \log x\,dx$ を解け

【解説】

最初にも話しましたが、この問題は本当によく出てきます。でも案外理解できていない人も多いです。重要な問題なので、しっかりと理解しておいてください。

まず覚えておいてほしいことは、$\log x$ の積分は直接できないということです。で、どういうふうに積分をするかというと $\log x = 1\times\log x$ と変形して部分積分を使って解いていきます。それでは、解答に進みますね。

$$\int \log x\,dx$$
$$=\int 1\times\log x\,dx$$
$$=\int (x)'\ \log x\,dx$$ ◀ 1 を積分したら x より
$$=x\ \log x-\int x\,(\log x)'\,dx$$
⇑ 部分積分の公式 $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)-\int f(x)\,g'(x)\,dx$ に $f(x)=x,\ g(x)=\log x$ で摘要した
$$=x\ \log x-\int x\,\frac{1}{x}\,dx$$ ◀ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より
$$=x\ \log x-\int 1\,dx$$
$$=x\ \log x-x+C\ (C\text{は積分定数})$$ ◀ これが答え

今回の積分 $\log x$ は本当によく出てきます。ですから、数学を得点源にしたいという人は $\int \log x\,dx = x\ \log x - x$ を公式として覚えた方がいいと思います。

この公式を覚えていたら、例えば $\int_1^2 \log x\,dx$ という定積分の計算が出てきたとき、わざわざ部分積分をすることなく、下記のように求めることができます。

$$\int_1^2 \log x\,dx$$
$$=\left[x\log x - x\right]_1^2$$
$$=2\log 2-2-(1\ \log 1-1)$$
$$=2\log 2-2+1$$
$$=2\log 2-1$$

と簡単に計算をすることができます。

これで、今回のプリントは終了です。部分積分は公式が長いため、はじめのうちは難しいと思います。でも、大学受験には必須なので繰り返し解くことによりしっかりと理解しておいてください。何度も解きなおしていると自然と解けるようになってくると思います。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com