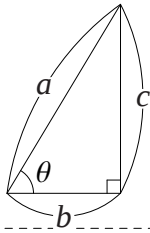


問題 1



左図のとき $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を a, b, c で表せ。

【解説】

三角関数の定義です。覚えてください。

【解答】

$$\sin \theta = \frac{c}{a}, \quad \cos \theta = \frac{b}{a}, \quad \tan \theta = \frac{c}{b}$$

問題 2

三角関数の相互関係式を 3 つかけ

【解説】

三角関数の相互関係と言われれば、次の 3 つの式をすぐに思い出せるようにしてください。

【解答】

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

問題 3

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を三角関数の相互関係の式で求めよ。ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ のいずれかの値が分かっている他の $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の値を求めよという問題は、三角関数の相互関係を使った求め方と、図を使って求める方法の 2 通りがあります。この問題は、前者の三角関数の相互関係を使った求め方で解いていきます。

まずは、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ で $\cos \theta$ の値を求め、そのあと $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を使い $\tan \theta$ の値を求めます。 $\tan \theta$ の値は $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ の公式を使って求めてもらってもかまいませんが、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を使ったほうが楽だと思います。

【解答】

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ に } \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ を代入した}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$(i) \cos \theta = \frac{3}{5} \text{ のとき}$$

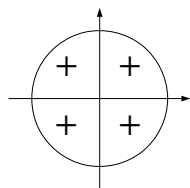
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \quad \leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$(ii) \cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ のとき}$$

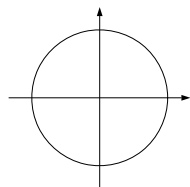
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \quad \leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

問題 4

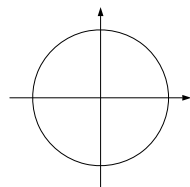
$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の象限ごとの正負を下図のように記せ。



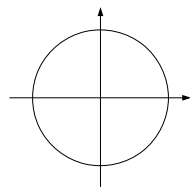
sin の正負



cos の正負



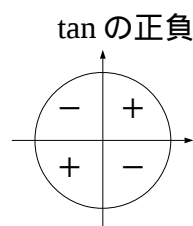
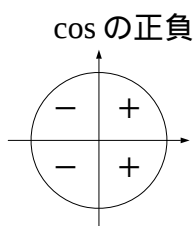
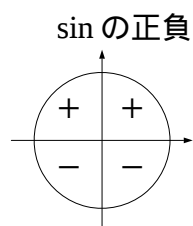
tan の正負



【解説】

三角関数の正負は象限によって決まっています。しっかりと覚えておいてください。

【解答】



問題 5

$\tan \theta = 2$ のとき、図を使って $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ。

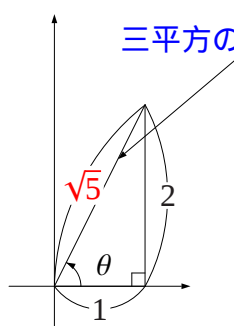
【解説】

図を使って、求める解法です。三角関数の相互関係を使った解法よりもこの図を使った解法のほうが計算が楽な場合が多いです。

【解答】

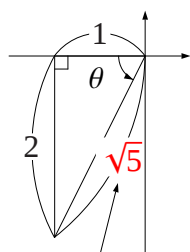
$\tan \theta = 2$ を図示すると次の 2 通り。⇐tan の値が 2 つまり正の値を取るのは第 1 象限と第 3 象限の 2 通りある

(i)



図より $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(ii)



図より $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

問題 6

(分数)+(分数) が出てきたときは何をする？

【解説】

数学の解法を日本語で覚えていってください。(分数)+(分数)が出てきたときは、ほとんどの場合通分をします。

【解答】

通分をして解いていく

問題 7

三角関数の問題では $\tan \theta$ では考えにくいので、() のみの式にしてから考えることが多い。

【解説】

これも日本語の問題です。

$\tan \theta$ は $\sin \theta$ や $\cos \theta$ に比べ扱いにくいので $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ の式を使って、 $\sin \theta, \cos \theta$ のみの式にしてから解いていくことが多いです。もちろん $\tan \theta$ のまま考えることもあります。問題、問題で判断をするようにしてください。

【解答】

$\sin \theta$ と $\cos \theta$

問題 8

$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ を示せ。

【解説】

左辺は $\tan \theta$ を含んでいるので、とりあえず $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を利用して $\sin \theta, \cos \theta$ のみの式にしてから解いていきます。また、そうすると (分数)+(分数) の形が出てくるので通分してから解いていきます。

【解答】

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta \\
 &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ を代入して } \sin \theta, \cos \theta \text{ のみの式にした} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} - \frac{\sin \theta(1 - \sin \theta)}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \quad \leftarrow (\text{分数})+(\text{分数}) \text{ の形をしているので通分をした} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta(1 - \sin \theta)}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{1 - \cancel{\sin \theta}}{\cos \theta(1 - \cancel{\sin \theta})} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} = (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

問題 9

次の対称式を基本対称式のみで表せ。

$$(1) \quad a^2 + b^2$$

$$(2) \quad a^3 + b^3$$

【解説】

対称式の問題です。対称式についての説明はここでは割愛します。もし分からなければ聞きにきてください。

【解答】

$$(1) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(2) \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

-問題 10

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

$$(2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

(3) $\sin \theta - \cos \theta$

【解説】

三角関数の対称式の問題です。よく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

(1)(2) は解けても (3) の解き方を忘れてしまったという人が意外に多いので、解き方をよく覚えておいてください。

【解答】

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を2乗した}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} - 1$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2)

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\uparrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ に } a = \sin \theta, b = \cos \theta \text{ を代入した}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

(3)

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2\left(-\frac{3}{8}\right) \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \text{ をそれぞれ代入}$$

$$= 1 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

問題 1 1

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

(3) $\sin \theta + \cos \theta$

【解説】

$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$ より、 $a^3 - b^3$ は a と $-b$ の対称式とみなすことができます。

【解答】

(1)

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

(2)

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \sin^3 \theta + (-\cos \theta)^3 \quad \blacktriangleleft \sin \theta \text{ と } -\cos \theta \text{ の対称式}$$

$$= \{\sin \theta + (-\cos \theta)\} - 3 \sin \theta (-\cos \theta) \{\sin \theta + (-\cos \theta)\}$$

$$\uparrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ の公式に } a = \sin \theta, b = \cos \theta \text{ をそれぞれ代入}$$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3 \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{8} \sqrt{2}$$

(3)

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$= 1 + 2 \frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \text{ を代入した}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

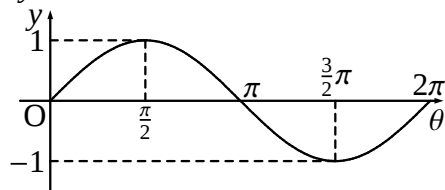
問題 1 2

$y = \sin \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, $y = \cos \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, $y = \tan \theta (-\pi < \theta < \pi)$ のグラフを書け

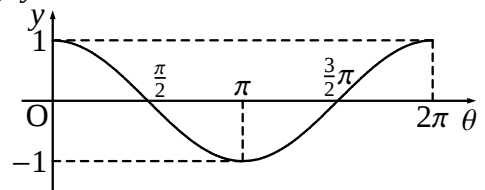
【解説】

三角関数のグラフの概形を覚えてください。

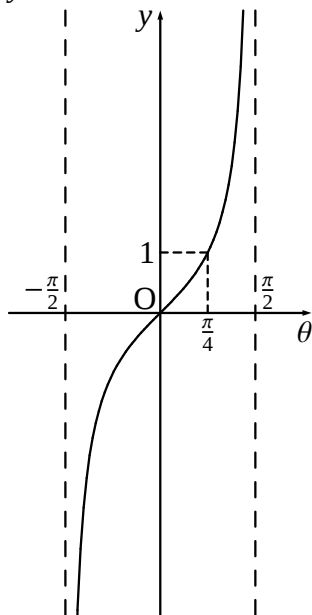
【解答Ⅰ】 $y = \sin \theta$ のグラフ



(2) $y = \cos \theta$ のグラフ



(3) $y = \tan \theta$ のグラフ



問題 13

$$\sin(-\theta) =$$

$$\cos(-\theta) =$$

$$\tan(-\theta) =$$

【解説】

グラフが原点对称のものは $f(\theta) = -f(-\theta)$ が成立し、 y 軸対称のものは $f(\theta) = f(-\theta)$ が成立します。

【解答】

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \blacktriangleleft y = \sin \theta \text{ のグラフは原点对称}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \blacktriangleleft y = \cos \theta \text{ のグラフは } y \text{ 軸対称}$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \blacktriangleleft y = \tan \theta \text{ のグラフは原点对称}$$

問題 1 4

次の方程式を解け、ただし $(0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$ とする。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

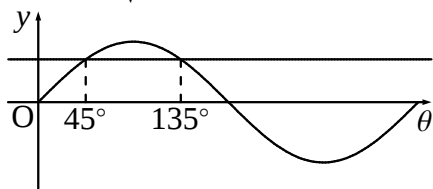
(3) $\tan \theta = \sqrt{3}$

【解説】

三角関数の方程式、不等式は単位円で解く解法とグラフを使って解く解法があります。どちらで解いてもらってもかまいませんが、このプリントではグラフを使って解いていきます。

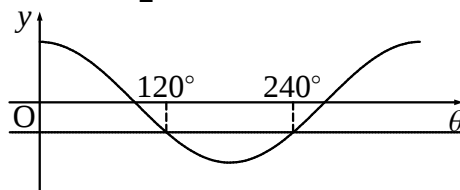
【解答】

(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$



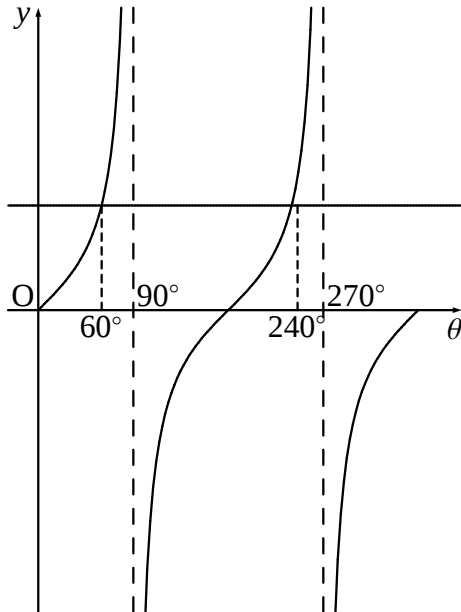
グラフより $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$



グラフより $\theta = 120^\circ, 240^\circ$

(3) $\tan \theta = \sqrt{3}$



グラフより $\theta = 60^\circ, 240^\circ$

問題 1 5

次の不等式を解け、ただし $(0 \leq \theta < 360^\circ)$ とする。

(1) $\sin \theta < -\frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta < \frac{1}{2}$

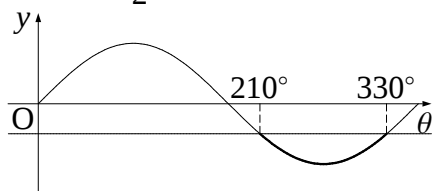
(3) $\tan \theta \leq 1$

【解説】

問題 1 4 と同じく、グラフを使って解いていきます。

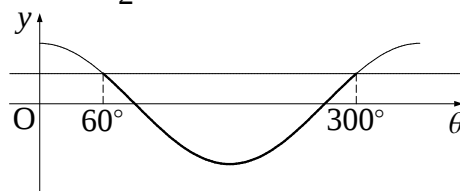
【解答】

(1) $\sin \theta < -\frac{1}{2}$



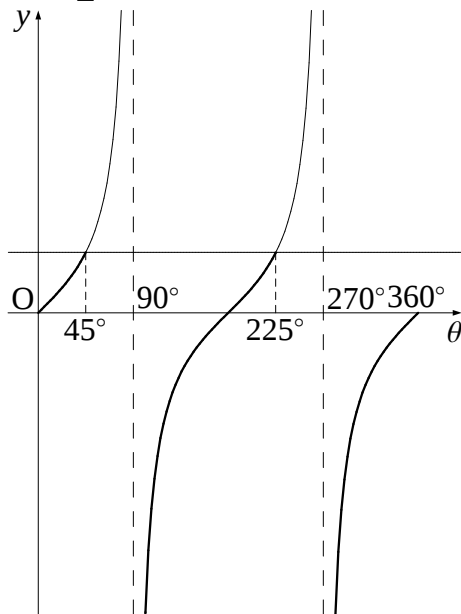
グラフより $210^\circ < \theta < 330^\circ$

(2) $\cos \theta < \frac{1}{2}$



グラフより $60^\circ < \theta < 300^\circ$

(3) $\tan \theta \leq 1$



グラフより

$0^\circ \leq \theta < 45^\circ, 90^\circ < \theta \leq 225^\circ, 270^\circ < \theta < 360^\circ$

問題 1 6

次の方程式を解け、ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

$$(1) 2 \sin^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - 2 = 0$$

$$(2) 2 \cos^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$$

【解説】

三角関数の問題では、相互関係の式を使って $\sin \theta$ または $\cos \theta$ のみの式にしてから解いていくことが多いです。

【解答】 (1)

$$2 \sin^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - 2 = 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) - \sqrt{2} \cos \theta - 2 = 0 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入}$$

$$2 - 2 \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - 2 = 0$$

$$2 \cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \cos \theta + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0 \text{ または } 2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$$

$$(i) \cos \theta = 0 \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$(ii) 2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0 \text{ つまり } \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき } \theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$

(2)

$$2 \cos^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) - 7 \sin \theta + 2 = 0 \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入}$$

$$2 - 2 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 7 \sin \theta - 4 = 0$$

$$(\sin \theta + 4)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = -4, \frac{1}{2} \text{ となるが } -1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ より } \sin \theta = -4 \text{ は不適}$$

$$\text{よって } \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

問題 1 7

次の不等式を解け、ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

$$(1) 2 \cos^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0$$

$$(2) \tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} < 0$$

【解説】

問題 1 6 と同じように解いていきます。

【解答】

(1)

$$2 \cos^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) + \sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0 \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入}$$

$$2 - 2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0$$

$$2 \sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta (2 \sin \theta - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore \sin \theta < 0 \text{ または } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta$$

(i) $\sin \theta < 0$ のとき $\pi < \theta < 2\pi$

(ii) $\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$

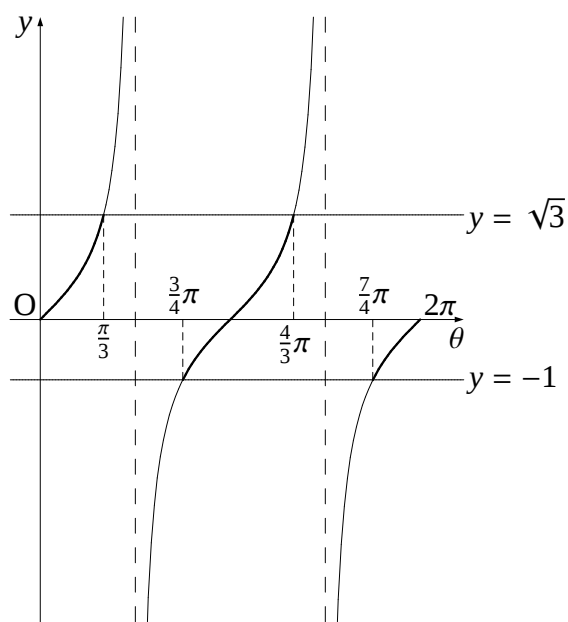
以上より、 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi, \pi < \theta < 2\pi$

(2)

$$\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) \tan \theta + \sqrt{3} < 0$$

$$(\tan \theta + 1)(\tan \theta - \sqrt{3}) < 0$$

$$-1 < \tan \theta < \sqrt{3}$$



グラフより $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

問題 18

次の方程式を解け、ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

$$(1) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

【解説】

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ では、考えにくいので $X = \theta + \frac{\pi}{6}$ とおいて解いていきます。(2) も同様に $X = 2\theta + \frac{\pi}{3}$ と置き換えます。

文字の置き換えは便利ですが、文字を置き換えた時は範囲に注意するということを忘れないようにしてください。

【解答】

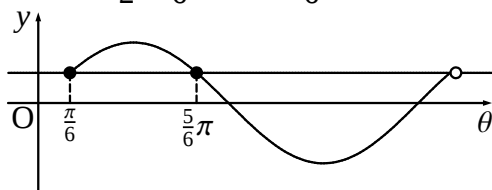
$$(1) X = \theta + \frac{\pi}{6} \text{ とする。}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq X < \frac{13}{6}\pi \quad \blacktriangleleft X \text{ の値の範囲が求まった}$$

$$\sin X = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{13}{6}\pi\right)$$



グラフより

$$X = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \blacktriangleleft X = \theta + \frac{\pi}{6} \text{ より}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \theta = 0, \frac{2}{3}\pi$$

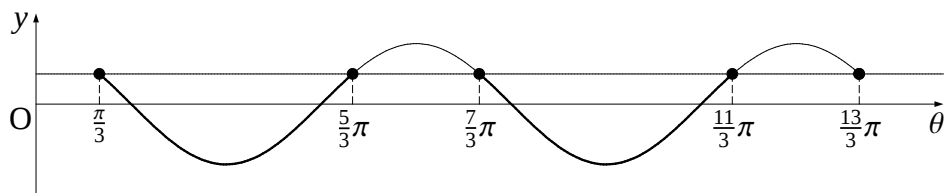
(2) $X = 2\theta + \frac{\pi}{6}$ とする。

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$0 \leq 2\theta < 4\pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 4\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq X < \frac{13}{3}\pi \quad \blacktriangleleft X \text{ の値の範囲が求まった}$$



グラフより、

$$\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{5}{3}\pi,$$

$$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi,$$

$$0 \leq 2\theta \leq \frac{4}{3}\pi,$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi,$$

$$\frac{7}{3}\pi \leq X \leq \frac{11}{3}\pi$$

$$\frac{7}{3}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{11}{3}\pi$$

$$2\pi \leq 2\theta \leq \frac{10}{3}\pi$$

$$\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

問題 19

加法定理を 6 つかけ。

【解説】

加法定理は三角関数の基本です。しっかりと覚えてください。

【解答】

① $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

② $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

③ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

④ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

⑤ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$$\textcircled{6} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

問題 2 0

加法定理から $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ を導け。

【解説】

2 倍角の公式は、加法定理に $\alpha = \beta = \theta$ を代入すると簡単に導けます。

【解答】

①

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$\alpha = \beta = \theta$ を代入すると

$$\sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \blacktriangleleft \text{sin の 2 倍角の公式が導けた！}$$

②

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$\alpha = \beta = \theta$ を代入すると

$$\cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \text{cos の 2 倍角の公式が導けた！}$$

③

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$\alpha = \beta = \theta$ を代入すると

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \blacktriangleleft \text{tan の 2 倍角の公式が導けた！}$$

【注意】

$\sin$ と $\cos$ の 2 倍角の公式は本当によく出題されるので、暗記してください。 $\tan$ はあまり出題されないで覚える必要はないです。

また $\cos$ の 2 倍角は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の公式から

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$$

$\cos$ の 2 倍角は上記 3 種類があります。3 つとも覚えておいてください。

問題 2 1

$\sin$ と $\cos$ の 2 倍角の公式を記せ (暗記)

$\sin 2\theta =$, $\cos 2\theta =$ (3 種類の式)

【解説】

2 倍角の公式は、暗記してしまうこと。

【解答】

① $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

② $\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$

問題 2 2

$\sin 3\theta$ と $\cos 3\theta$ の公式を導け。

【解説】

3 倍角の公式も加法定理から簡単に求めることができます。

【解答】 $\sin$ の加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の 3 倍角の公式が導けた！}$$

$\cos$ の加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 3\theta = \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^3 \theta$$

$$= -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta \quad \blacktriangleleft \cos \text{ の 3 倍角の公式が導けた！}$$

【注意】

3 倍角の公式は 2 倍角の公式ほどよく出るものではないが、導くのが面倒なので暗記しておいてください。

どういうふうに覚えてもいいですが、有名なゴロ合わせがあるのでそのゴロ合わせで覚えたらいいと思います。

3 倍角のゴロ合わせなんですけど、これも人から聞いたものですが sin の 3 倍角の公式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「3」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「- (マイナス)」、「ヨ」は「4」、「シ」は「sin」、「ミ」は「3 乗の 3」です。

また cos の 3 倍角は sin の 3 倍角と符号が反対になり、sin のところに cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。

問題 2 3

sin 3θ と cos 3θ を記せ。(暗記)

【解説】

3 倍角の公式は暗記してください。

【解答】

$$(1) \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$(2) \cos 3\theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

問題 2 4

sin と cos の半角の公式を求めよ。

【解説】

半角の公式は $\cos$ の 2 倍角の公式から導きます。半角の公式はできたら暗記してほしいですが、慣れてきたら 2 倍角の公式でほとんど一瞬で導けるので、どちらでもいいです。ただ、導き方はしっかりと理解しておいてください。

【解答】

(1)

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \leftarrow \cos \text{ の 2 倍角の公式より}$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \text{半角の公式が導けた！}$$

(2)

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \quad \leftarrow \cos \text{ の 2 倍角の公式より}$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \text{半角の公式が導けた！}$$

問題 2 5

以下の積和の公式を 4 つ記せ。

① $\sin \alpha \cos \beta =$

② $\cos \alpha \sin \beta =$

③ $\cos \alpha \cos \beta =$

④ $\sin \alpha \sin \beta =$

【解説】

積和の公式は加法定理から簡単に導けます。この公式は、それほど出てこないのに暗記する必要はないです。むしろ、暗記すると間違える可能性があるので、必要なときはその場で加法定理から導くようにしてください。

【解答】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 & +) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \\
 & 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
 & \therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 で割り、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 & -) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \\
 & 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\
 & \therefore \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 で割り、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 & +) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \\
 & 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\
 & \therefore \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 で割り、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 & -) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \\
 & -2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \\
 & \therefore \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 で割り、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

問題 2 6

以下の和積の公式を 4 つ記せ。

① $\sin A + \sin B =$

② $\sin A - \sin B =$

③ $\cos A + \cos B =$

④ $\cos A - \cos B =$

【解説】

和積の公式も積和の公式と同じように加法定理から簡単に導けます。この公式も、それほど出てこないのに暗記する必要はないです。むしろ、暗記すると間違える可能性があるなので、必要なときはその場で加法定理から導くようにしてください。

【解答】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 & +) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \\
 \therefore \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \blacktriangleleft \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ として、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 & -) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \\
 \therefore \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad \blacktriangleleft \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ として、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 & +) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \\
 \therefore \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \blacktriangleleft \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ として、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 & -) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 & \hline
 & \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \\
 \therefore \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad \blacktriangleleft \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ として、公式が導けた！}
 \end{aligned}$$

【注】 α と β について

$$\begin{aligned}
 & A = \alpha + \beta \\
 & +) B = \alpha - \beta \\
 & \hline
 & A + B = 2\alpha \\
 \therefore \alpha &= \frac{A+B}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A = \alpha + \beta \\
 & -) B = \alpha - \beta \\
 & \hline
 & A - B = 2\beta \\
 \therefore \beta &= \frac{A-B}{2}
 \end{aligned}$$

問題 2 7

$$\sin(\theta + 2\pi n) = \quad \cos(\theta + 2\pi n) = \quad \tan(\theta + \pi n) =$$

【解説】

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ の周期は 2π 、 $\tan \theta$ の周期は π です。

【解答】

$$(1) \sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta \quad (2) \cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta \quad (3) \tan(\theta + \pi n) = \tan \theta$$

問題 2 8

$$\sin(\theta + \pi) = \quad \cos(\theta + \pi) = \quad \tan(\theta + \pi) =$$

【解説】

こういった類の公式は暗記している人もいますが、加法定理で簡単に導けるので暗記しなくていいです。 $\tan$ も加法定理でもできますが、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ の公式を使ったほうが速いです。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin(\theta + \pi) &= \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos(\theta + \pi) &= \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \tan(\theta + \pi) &= \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

問題 2 9

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \quad \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \quad \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) =$$

【解説】

この問題も加法定理から導きます。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{2} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{2} \\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} \\ &= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= -\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

問題 30

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

【解説】

加法定理から導きます。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\frac{\pi}{2} \cos\theta - \cos\frac{\pi}{2} \sin\theta \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos\theta + \sin\frac{\pi}{2} \sin\theta \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\tan \theta}\end{aligned}$$

問題 3 1

$$\sin(\pi - \theta) = \quad \cos(\pi - \theta) = \quad \tan(\pi - \theta) =$$

【解説】

加法定理から導きます。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta \\ &= \sin \theta\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \theta) &= \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta \\ &= -\cos \theta\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan(\pi - \theta) &= \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} \\ &= -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -\tan \theta\end{aligned}$$

問題 3 2

$$(1) \sin 75^\circ \qquad (2) \cos 105^\circ \qquad (3) \tan 15^\circ$$

【解説】

$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ などが求められる角度です。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(45^\circ + 60^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

問題 3 3

(1) $\sin 22.5^\circ$

(2) $\cos 22.5^\circ$

【解説】

22.5° を 2 倍すると 45° になるので半角の公式を使って求めます。

【解答】

(1)

$$\sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \quad \blacktriangleleft \text{半角の公式より}$$

$$= \frac{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin 22.5^\circ = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ となる。}$$

$$\sin 22.5^\circ > 0 \text{ より、} \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

(2)

$$\cos^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} \quad \blacktriangleleft \text{半角の公式より}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos 22.5^\circ = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ となる。}$$

$$\cos 22.5^\circ > 0 \text{ より、} \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

問題 3 4

$\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin \theta - 1 = 0$ を解け。ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を代入すれば、 $\sin \theta$ のみの式になります。

【解答】

$$\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin \theta - 1 = 0$$

$$(1 - 2\sin^2 \theta) + \sqrt{3} \sin \theta - 1 = 0 \quad \blacktriangleleft \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$2\sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta (2\sin \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{よって } \sin \theta = 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

問題 3 5

$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ を解け。ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

よく分からないけど、とりあえず $\sin$ の 2 倍角と 3 倍角を代入して解いていくことにします。

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 0$$

↑ $\sin$ の 2 倍角、3 倍角の公式をそれぞれ代入した

ここからすべての項に $\sin$ が含まれているから両辺を $\sin$ で割りたいけど、いきなり割ってはダメ。両辺を変数で割るときは、その変数が 0 になりうるかどうか確認しないといけない。もし、なる場合は場合分けをして考える。

今回は、 $\sin \theta = 0$ となるのは $\theta = 0, \pi$ のときなので $\theta \neq 0, \pi$ のときと $\theta = 0, \pi$ のときは場合分けをしないといけません。それでは解答に進みます。

【解答】

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 0 \cdots (*)$$

(i) $\sin \theta = 0$ つまり $\theta = 0$ または π のとき

(*) は成立するので、これは解となる。

(ii) $\sin \theta \neq 0$ つまり $\theta \neq 0, \pi$ のとき、(*) の両辺を $\sin \theta (\neq 0)$ で割ると

$$1 + 2 \cos \theta + 3 - 4 \sin^2 \theta = 0$$

$$1 + 2 \cos \theta + 3 - 4(1 - \cos^2 \theta) = 0 \quad \leftarrow \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1 \text{ より}$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \cos \theta + 1) = 0$$

$$\cos \theta = 0, -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

以上より、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$

問題 3 6

$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$ を解け。ただし $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

この問題は $\sin 4\theta$ が出てきています。4 倍角の公式も加法定理から導けますが、4 倍角以上の式がでてきたら、ほとんどの場合で和積の公式を利用します。 $\sin 2\theta$ と $\sin 4\theta$ のペアですとうまくいきます。ペアは一番大きいものと小さいものをペアにすることが多いです。

【解答】

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

$$(\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \sin 3\theta = 0$$

$$2 \sin \frac{2\theta + 4\theta}{2} \cos \frac{2\theta - 4\theta}{2} + \sin 3\theta = 0 \quad \leftarrow \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \text{ より}$$

$$2 \sin 3\theta \cos(-\theta) + \sin 3\theta = 0$$

$$2 \sin 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta = 0 \quad \leftarrow \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ より}$$

$$\sin 3\theta (2 \cos \theta + 1) = 0$$

(i) $\sin 3\theta = 0$ のとき、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $0 \leq 3\theta < 6\pi$ を考え

$$3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $2 \cos \theta + 1 = 0$ つまり $\theta = -\frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$$\text{以上より、} \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

問題 3 7

$\sin 18^\circ$ を求めよ。

【解説】

この問題は頻出ですよ。でも、知らなかったら全く思いつかないと思います。

$5\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\theta + 3\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ - \theta$ を利用して解いていきます。

【解答】

$\theta = 18^\circ$ とする。

$$5\theta = 90^\circ$$

$$2\theta + 3\theta = 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

$$\sin 2\theta = \cos 3\theta \quad \blacktriangleleft \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -3 \cos \theta + 4 \cos 3\theta \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の } 2 \text{ 倍角、} \cos \text{ の } 3 \text{ 倍角の公式より}$$

ここで $\cos \theta \neq 0$ より $\blacktriangleleft$ 両辺を変数で割るときは、0 になるか確認

$$2 \sin \theta = -3 + 4 \cos^2 \theta$$

$$2 \sin \theta = -3 + 4(1 - \sin^2 \theta) \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ より } \cos \text{ のみの式にした}$$

$$4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{4} \quad \blacktriangleleft \text{解の公式を使った}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ここで $\sin \theta > 0$ より $\blacktriangleleft \sin 18^\circ$ は当然正

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

問題 38

$t = \tan \frac{\theta}{2}$ のとき, $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ を t を用いて表せ。

【解説】

この問題もよく出てきます。これも知らなければ解けないと思うので解き方をしっかりと覚えておいてください。

$$\sin \theta = \sin 2 \cdot \frac{\theta}{2}$$

↑ 与えられて条件は $\tan \frac{\theta}{2}$ のみ、この条件を使うために強引に $\frac{\theta}{2}$ が出てくるように式変形をした

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \blacktriangleleft 2 \text{ 倍角の公式より}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$ より、こんな言われたら気づくけど普通は絶対に気づかないと思う。ですから、しっかりと覚えておいてください。ここからは分母分子を $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ で割るとうまくいきます。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{ で割った} \\
 &= \frac{2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}{\left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \leftarrow \text{これが答え}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{ で割った} \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2}{\left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \leftarrow \text{これが答え}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \quad \leftarrow \text{分母分子に } (1+t^2) \text{ をかけた。これが答え。}\end{aligned}$$

問題 39

次の式を $\sin$ で合成せよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta$

(2) $-\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

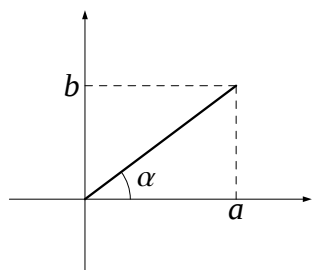
(3) $\sin \theta - \cos \theta$

【解説】

$a \sin \theta + b \cos \theta$ のような形をしているときは、まず間違いなく合成をすると思ってもらってかまいません。 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ の形にすることを合成といいます。

α は次のようにしたら求めることができます。

α の求め方



ステップ 1 $\sin \theta$ の係数 a を x 軸上にかく

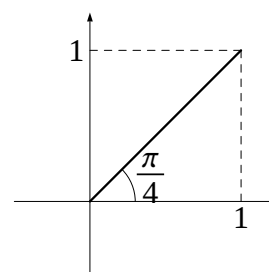
ステップ 2 $\cos \theta$ の係数 b を y 軸上にかく

ステップ 3 (a, b) から原点に線を引き、その線分が x 軸と正の向きとなす角が α となる！

【解答】

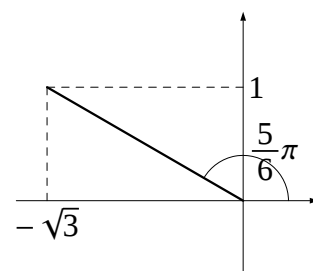
(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \text{合成をした}$$



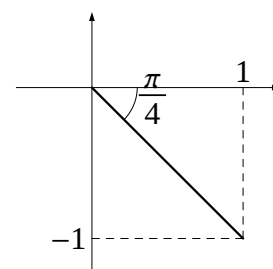
(2)

$$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$



(3)

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$



問題 4 0

問題に $a\sin\theta + b\cos\theta$ の部分が出てきたら () をする。

【解説】

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のような形をしているときは、合成をします。合成は $a\sin\bigcirc + b\sin\bigcirc$ の $\bigcirc$ の形が同じならできます。

【解答】

合成

問題 4 1

次の方程式・不等式を解け。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$(1) \sin\theta + \cos = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2) \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < \sqrt{3}$$

【解説】

まずは、合成します。そのあとは問題 1 8 と同じような問題で、文字の置き換えをして解いていきます。

【解答】

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacktriangleleft \text{合成をした} \text{ ここで } \theta + \frac{\pi}{4} \text{ とする。}$$

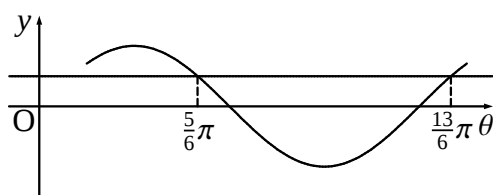
$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4} \quad \blacktriangleleft \text{全ての辺に } \frac{\pi}{4} \text{ を加えた}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{9}{4}\pi \quad \blacktriangleleft X \text{ の値の範囲が求まった。文字を置き換えた時は範囲に注意}$$

$$\sin X = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{9}{4}\pi \right)$$



グラフより

$$X = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

(2)

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta < \sqrt{3}$$

$$2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3} \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$

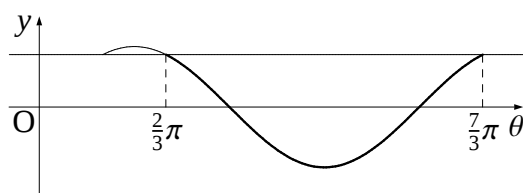
ここで $X = \theta + \frac{\pi}{3}$ とする。

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad \blacktriangleleft \text{全ての辺に } \frac{\pi}{3} \text{ を加えた}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq X < \frac{7}{3}\pi \quad \blacktriangleleft X \text{ の値の範囲が求まった。文字を置き換えた時は範囲に注意}$$

$$\sin X < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7}{3}\pi\right)$$



グラフより

$$\frac{2}{3}\pi < X < \frac{7}{3}\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

問題 4 2

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $y = 2 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 1$ の最大値・最小値。およびそれらを与える θ の値を求めよ。

【解説】

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ を代入すると $\sin \theta$ のみの式になってくれます。

【解答】

$$y = 2 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 1$$

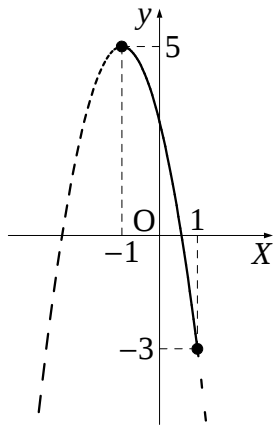
$$= 2(1 - \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta + 1 \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入して } \sin \text{ のみの式にした}$$

$$= -2 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3$$

ここで $\sin \theta = X$ とする。 $-1 \leq X \leq 1$ $\blacktriangleleft$ 置き換えた時は、範囲に注意 となる

$$= -2X^2 - 4X + 3$$

$$= -2(X+1)^2 + 5 \quad \blacktriangleleft 2 \text{ 次関数のグラフをかくために平方完成をした}$$



グラフより $X = -1$ のとき、最大値 5 をとり、 $X = 1$ のとき、最小値 -3 をとる。

また $X = \sin \theta$ より $X = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$ 、 $X = 1$ のとき $\theta = \frac{\pi}{2}$

以上より、 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき最大値 5 をとり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -3 をとる。

問題 4 3

与式が $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式のと看 $X = ??$ と置き換えて問題を解いていく。

【解説】

与式が $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式のと看は $X = \sin \theta \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

$$\sin \theta + \cos \theta = X$$

$$(\sin \theta + \cos \theta) = X^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = X^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = X^2 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{X^2 - 1}{2} \quad \blacktriangleleft X \text{ のみで表せた}$$

上記のように $\sin \theta = X$ とおいたとき $\sin \theta \cos \theta$ も X で表せるので、与式が $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式のと看は $X = \sin \theta + \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

【解答】

$$X = \sin \theta + \cos \theta$$

問題 4 4

$f(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta + 2$ の最大値と最小値を求めよ。

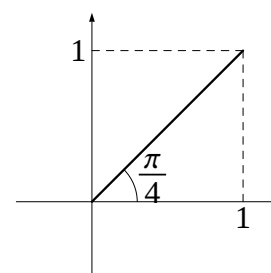
【解説】

与式が $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式なので $X = \sin \theta + \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

【解答】

$X = \sin \theta + \cos \theta$ とする。

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \text{合成をした}$$



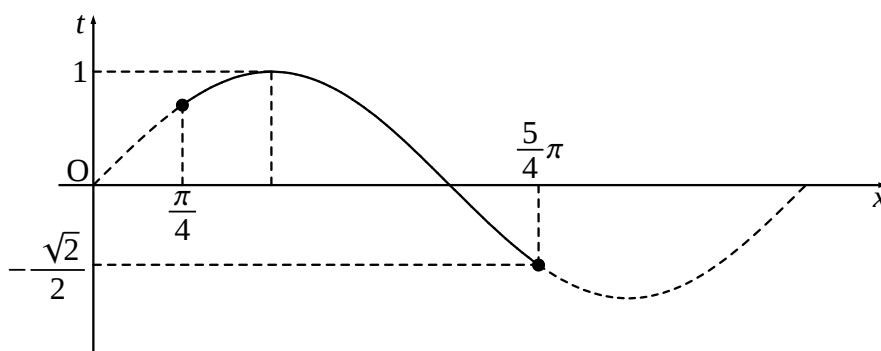
ここで $t = \theta + \frac{\pi}{4}$ とする。

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \text{文字を置き換えた時は範囲に注意する。}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$$

$\sin t$ ($\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$) の最大値・最小値を求める。



グラフより

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1$$

$$-2\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 2t \leq 2 \quad \leftarrow \text{両辺に 2 をかけた}$$

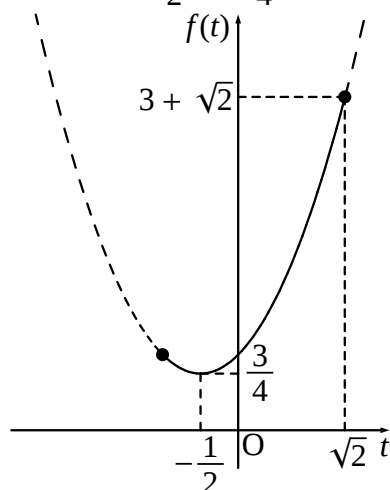
$$-\sqrt{2} \leq X \leq 2 \quad \leftarrow X = 2t \text{ より}$$

$f(\theta)$ の最大値と最小値は

$f(t) = t^2 + t + 1$ の $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ の最大値と最小値と一致する。

$$f(t) = t^2 + t + 1$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \quad \blacktriangleleft \text{平方完成をした！}$$



グラフより、 $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ 、 $t = \sqrt{2}$ のとき最大値 $3 + \sqrt{2}$ をとる。

問題 4 5

与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式のとき $X = ??$ と置き換えて問題を解いていく。

【解説】

与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式のときは $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

$$\sin \theta - \cos \theta = X$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = X^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2}$$

【解答】

$$X = \sin \theta - \cos \theta$$

問題 4 6

$f(\theta) = 2(\sin \theta - \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式なので、 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

【解答】

$X = \sin \theta - \cos \theta$ とする

$$= \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$

$$-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad \text{より} \quad -\sqrt{2} \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \quad \text{となる。}$$

↑ 文字を置き換えた時は範囲に注意する。 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えたので X の値の範囲を求めた。今回の問題では θ に値の範囲がないので当然 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ の値の範囲は $-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となります。

$$\sin \theta - \cos \theta = X$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = X^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{より}$$

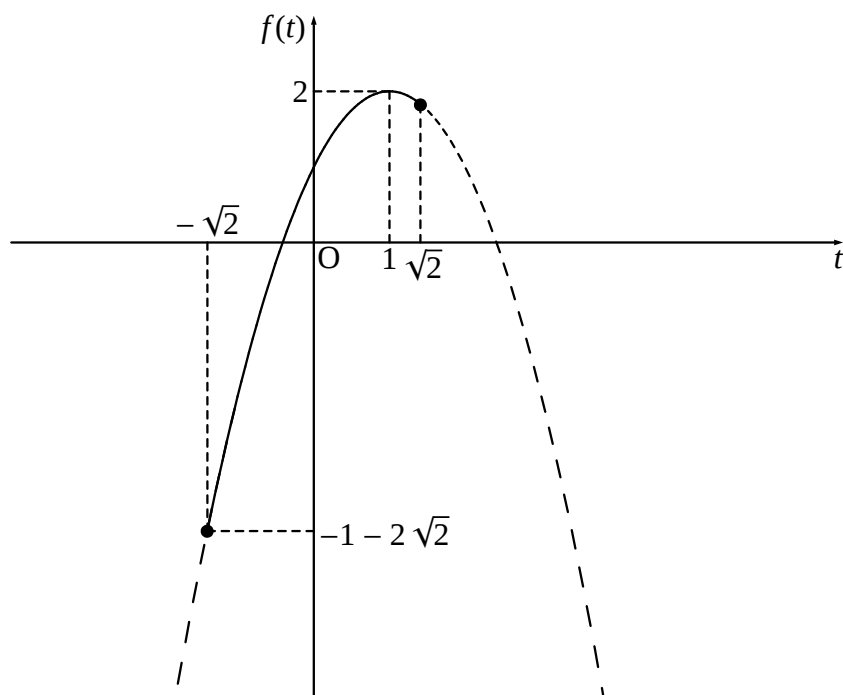
$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2}$$

$$f(\theta) = 2(\sin \theta - \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2X + 2 \cdot \frac{1 - X^2}{2} \quad \blacktriangleleft \sin \theta - \cos \theta = X, \sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2} \quad \text{をそれぞれ代入した}$$

$$= -X^2 + 2X + 1$$

$$= -(X - 1)^2 + 2 \quad \blacktriangleleft \text{平方完成をした}$$



グラフより、最大値 2、最小値 $-1 - 2\sqrt{2}$

問題 4 7

$a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ の形を見たら？

【解説】

与式が $a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ の形になっていたら倍角の公式より導かれる、

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

を代入して解いていきます。

これらを代入した後は、合成を使って解いていきます。

【解答】

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

を代入してから解いていく。

問題 4 8

$f(\theta) = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

与式が $a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ の形になっているので、

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

を代入して解いていきます。

【解答】

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\uparrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \text{ をそれぞれ代入した。}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$= \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta$$

$$= 2 \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leftarrow \text{合成をした}$$

$$-1 \leq \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ より}$$

$$-2 \leq 2 \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq f(\theta) \leq 2$$

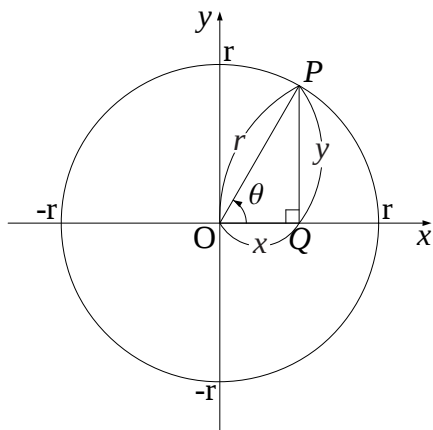
よって $f(\theta)$ の最大値は 2, 最小値は -2 である。

問題 49

$x^2 + y^2 = r^2$ 上のとき、 x, y を r, θ を用いて表せ。

【解説】

三角関数の定義



$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

三角関数の定義より

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

が成立します。

$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点は $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおけることを覚えておいてください。

【解答】

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

問題 50

$x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $3x + y$ の最大値と最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ。

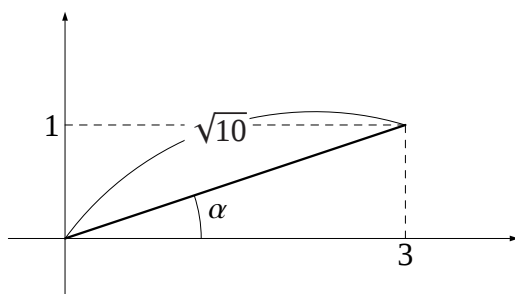
【解説】

「 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点は $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおける」この性質を使います。

【解答】

$x^2 + y^2 = 1$ 上の点は $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ とおける。

$$\begin{aligned} 3x + y &= 3 \cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{10} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$



ただし、 α は $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ を満たす。

↑ 合成したとき α の角度が分からないときもあります。

$$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$$

$$-\sqrt{10} \leq \sqrt{10} \sin(\theta + \alpha) \leq \sqrt{10}$$

よって最小値 $-\sqrt{10}$ 、最大値 $\sqrt{10}$

問題 5 0

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上のとき、 x, y を r, θ, a, b を用いて表せ。

【解説】

問題 4 9 「 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点は $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおける」と話しました。

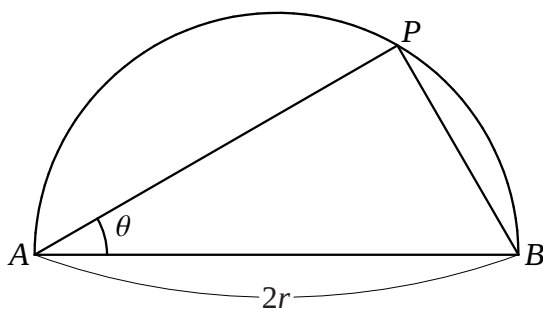
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ は、 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点から x 軸方向に $+a$ 、 y 軸方向に $+b$ 平行移動させたものなので、

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点は $(x, y) = (a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ になります。

【解答】

$$(x, y) = (a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$$

問題 5 2



上図のようなとき AP, BP を r, θ を用いて表せ。

【解説】

AB は直径なので円周角の性質より、 $\angle APB = 90^\circ$ となります。あとは三角関数の定義にしたがって

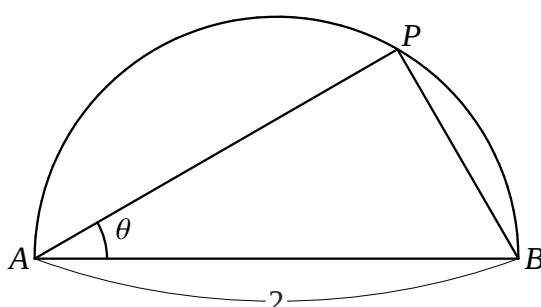
$$\sin \theta = \frac{BP}{AB} \Rightarrow BP = AB \sin \theta \Rightarrow BP = 2r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AP = AB \cos \theta \Rightarrow AP = 2r \cos \theta$$

【解答】

$$AP = 2r \cos \theta, BP = 2r \sin \theta$$

問題 5 3



上図のように P は弧 AB (点 A, B は除く) を動いている。以下の問いに答えよ。

- (1) $AP + PB$ を θ を用いて表せ。
- (2) $AP + PB$ の最大値を求めよ。

【解説】

問題 5 2 を使って解いていくだけです。

θ の値の範囲なんですが $0 < \theta < 90^\circ$ になります。なぜこうなるか簡単に説明をすると、まず P が A に一致するとき $\theta = 0^\circ$ です。 P が A から B に近づくにつれどんどんと角度が大きくなりますが P が A に近づくとき $\angle B$ はほとんどの 0° になります。三角形の内角の和が 180° であることを考えて $\theta = \angle APB - \angle PBA \asymp 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$ となります。

【解答】

(1)

$$AP = 2 \cos \theta, PB = 2 \sin \theta \text{ となる。}$$

$$AP + PB = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$$

(2)

$$AP + PB = 2(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 2\sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$

ここで $0 < \theta < 90^\circ$ より、 $45^\circ < \theta + 45^\circ < 135^\circ$ となる。

よって最大値は $\sqrt{2}$ となる。

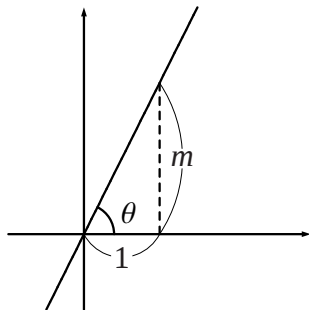
問題 5 4

$y = mx$ を x 軸の正方向となす角を θ とする。 $\tan \theta$ は?

【解説】

$y = mx$ を x 軸の正方向となす角を θ とすると、(傾き) = $\tan \theta$

こうなることは、図を考えれば一瞬で分かります。



【解答】

$$\tan \theta = m$$

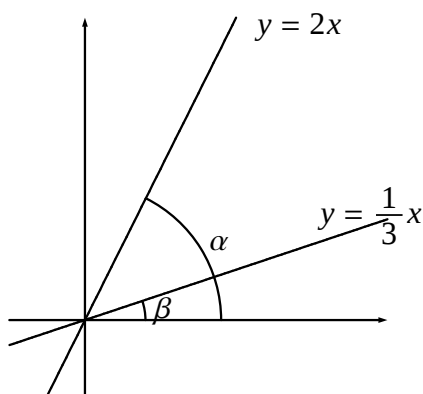
問題 5 5

$y = 2x$ と $y = \frac{1}{3}x$ のなす角 θ を求めよ。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

【解説】

(傾き) = $\tan \theta$ を使って解いていきます。

【解答】



上図のように $y = 2x$ と $y = \frac{1}{3}x$ と x 軸のなす角をそれぞれ α, β とする。

$y = 2x$ と $y = \frac{1}{3}x$ となす角 θ は $\theta = \alpha - \beta$ となる。

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ より } \theta = 45^\circ$$

問題 5 6

次の条件を満たす三角形はどのような三角形か？

(1) $c = a \cos B$

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$

【解説】

どのような三角形か？という問題を三角形の形状を問う問題と言います。三角形の形状を問う問題は余弦定理や正弦定理を使って、角度と長さが混じった式を長さのみの式にしてから解いていくことが鉄則です。

また、実際の受験問題で出題される場合、方程式が複雑になる場合が多いですが、三角形の形状は正三角形、二等辺三角形、直角三角形くらいしかないので、答えはいずれかになると頭に叩き込んで計算したら式変形を思い付けると思います。

【解答】

(1)

$$c = a \cos B$$

$$c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \leftarrow \text{余弦定理より}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

よって $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。

(2) 正弦定理より、 $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$

同様に $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ がいえる。

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よって $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である。

以上お疲れさまでした。問題はこちらです。

<http://www.hmg-gen.com/kousiki-sankaku>

河見賢司

「高校数学の勉強法」

<http://www.hmg-gen.com/>

メールアドレス（感想をもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com