三角関数No2. 「三角関数の積和の公式」

こんにちは、河見賢司です。

今回は、前回の「三角関数の公式」(http://www.hmg-gen.com/sankakukousiki.pdf) の中で解説していなかった「和 ⇔ 積の公式」を解説します。

さっそくですが積和の公式です。

積和の公式

① $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

② $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

③ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

④ $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

積和の公式を全て暗記している人もいますが、簡単に導けるし出題頻度も高くないので覚える必要はないと思います。見てもらえば分かると思いますが、どの公式もよく似ているので暗記するとかえって混同してしまい、間違ってしまうと思います。私もこの公式は覚えていません。試験で積和の公式が必要になれば、そのつど加法定理で積和の公式を導いてから解いていっています。

では、積和の公式を導いていきます。

積和の公式の導き方は $(\alpha+\beta)$ の加法定理と $(\alpha-\beta)$ の加法定理を二つかいて足したり、ひいたりして求めていきます。

積和 (1) の公式の証明

$$
\begin{array}{rl}
 & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
+) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta
\end{array}
$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ ◀ 両辺を２で割り、公式が導けた！

積和 (2) の公式の証明

$$\begin{array}{rl} & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ -) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline & \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \end{array}$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

$$\therefore\ \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$ ◀ 両辺を 2 で割り、公式が導けた！

次に ③, ④ の公式の証明です。加法定理で $\cos\alpha\cos\beta$ や $\sin\alpha\sin\beta$ が出てくるのは cos の加法定理なので、これらの公式は cos の加法定理を足したり引いたりして求めていきます。

積和 (3) の公式の証明

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ +) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline & \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$ ◀ 両辺を 2 で割り、公式が導けた！

積和 (4) の公式の証明

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ -) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline & \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \end{array}$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$ ◀ 両辺を −2 で割り、公式が導けた！

次に和積の公式です。

積和の公式

① $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

② $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

③ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

④ $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

和積の公式も積和の公式と同じように加法定理を足したり引いたりして求めます。途中までの作業は、積和の公式とまったく同じです。

とりあえず一つ目の $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を導きたいと思います。

$\sin A + \sin B$ なので、sin の加法定理を二つ書き出し、互いに足し合わせます (積和の公式でやったこととまったく同じです)

$$
\begin{array}{rl}
 & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
+) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta
\end{array}
$$

左辺を $\sin A + \sin B$ にしたいので、とりあえず $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とでも置き換えます。

ここから、α と β を $A,\ B$ のみで表します。意外に知らない人が多いのですが、これは $A = \alpha+\beta$ と $B = \alpha-\beta$ を足したり引いたりしたら簡単に求まりますよ。

$$
\begin{array}{rl}
 & A = \alpha+\beta \\
+) & B = \alpha-\beta \\
\hline
 & A+B = 2\alpha
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & A = \alpha+\beta \\
-) & B = \alpha-\beta \\
\hline
 & A-B = 2\beta
\end{array}
$$

$$\therefore \alpha = \frac{A+B}{2} \qquad\qquad \therefore \beta = \frac{A-B}{2}$$

このことを踏まえて、和積の公式を導いていきます。

和積 (1) の公式の証明

$$
\begin{array}{rl}
 & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
+) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta
\end{array}
$$

$\therefore \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ◀ $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ と置き換えて、公式が導けた！

和積 (2) の公式の証明

$$
\begin{array}{rl}
 & \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
-) & \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta
\end{array}
$$

$\therefore \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ ◀ $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ と置き換えて、公式が導けた！

積和 (3) の公式の証明

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
+) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta
\end{array}
$$

$\therefore \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ◀ $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ と置き換えて、公式が導けた！

積和 (4) の公式の証明

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
-) & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\hline
 & \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta
\end{array}
$$

$\therefore \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ ◀ $\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ と置き換えて、公式が導けた！

今回のプリントはこれで終了です。三角関数については今回解説をした三角関数の公式と以下の２つのプリントで勉強してください。

「三角関数の公式」
http://www.hmg-gen.com/sankakukousiki.pdf

「グラフを使った三角関数の方程式の解き方」
http://www.hmg-gen.com/sankakuhouteisiki.pdf (← このプリントは容量が 5.5MB と重いので注意してください)

この２つ本当に重要です。特に「グラフを使った三角関数の方程式の解き方」は理解できていない人が多いので、ぜひとも勉強しておいてください。

今日のプリントと、上記二つのプリントをやってもらえば実際の三角関数の問題もストレスなく取り組めると思います。

また余力があれば
「$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ の加法定理を使った導きびき方」
http://www.hmg-gen.com/sankaku90.pdf
このプリントを見てください。加法定理って便利だなと思いますよ。

次回からは、三角関数の典型問題を解説していきたいと思います。

がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com