

数学の鉄則「文字消去」

今回のテーマは「文字消去」です。
まずは次のことを覚えておいてください。

文字消去

数学では文字（変数）が多ければとにかく考えにくい。
文字消去できるときは、何よりもまず文字消去してから考える

数学で何が難しいかって言ったら、最初に何をしたらいいかわからないことですよ。

最初の式変形さえ分かれば、あとはどんどん問題が解けてしまうということも多いです。

最初の式変形なんですけど、もちろん考えないといけない問題も多いんですが、数学にはある規則があり、その規則に従ったら解けるものもすくなくありません。

今回解説する「文字消去」もそれらの一つです。解説している内容はごくごく当たり前のことかもしれませんが、このごくごく当たり前のことが理解できていないことが多いです。簡単かも知れませんが、真剣に取り組むようにしてください。

文字消去重要なのでもう一度書いておきます。

文字消去

数学では文字（変数）が多ければとにかく考えにくい。
文字消去できるときは、何よりもまず文字消去してから考える

この意味は、問題の解き方の方針がまったくたたないとしても、うまくいくかどうかよくわかんなくても、文字消去できるときはとりあえず文字消去してみるということです。

どういった問題でも例外はありません。とにかく文字消去できるときは、何よりもまず文字消去するようにしてください。

では練習問題として次の例題を解いてみましょう。

例題

$abc = 1$ のとき $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$ の値を求めよ。

【解説】

まず $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$ の値を求めよなんて言われてもよく分かんないよね。

分数式だから、できることは通分するくらいなんだけど、まさか通分するなんてありえない… ややこしすぎる… (← 数学では、できることはできるけど、あまりに面倒な式変形をするということはごくごく稀です。

式変形が面倒すぎるなと思うときは、何か別の解法はないかな？と考えるようにしておいてください)

そこで次の鉄則を使います。

文字消去

数学では文字(変数)が多ければとにかく考えにくい。
文字消去できるときは、何よりもまず文字消去してから考える

今回の問題は $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$ には変数が a, b, c の3つがあります。でも $abc = 1$ っていう条件があるんだから、 $abc = 1$ を $c = \frac{1}{ab}$ って変形して $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$ に代入したら

$$\begin{aligned} & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1} + \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1} \quad \leftarrow \text{変数が } a, b \text{ のみになった} \end{aligned}$$

うまくいくかどうかは別にして変数の数が a, b, c の3つから a, b のふたつにできるんじゃない？

くどいくらい繰り返すけど、この段階ではうまくいくかどうか分かんないよ。でも、とりあらず文字数を減らせるときは、何よりもまず文字を減らすということを、覚えておいて。そして不思議なことに、数学は文字を減らす方向で考えたらうまく解けるようになっています

【解答】

$$\begin{aligned} & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ & \quad abc = 1 \text{ より } c = \frac{1}{ab} \text{ を代入} \end{aligned}$$

$$(\text{与式}) = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1} + \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1}$$

ここで $\frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1}$ と $\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1}$ をまず計算する。

$$\frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1}$$

$$= \frac{b}{\frac{1}{a} + b + 1}$$

$$= \frac{b}{\frac{1}{a} + b + 1} \cdot \frac{a}{a} \quad \leftarrow \text{分母分子に } a \text{ をかけた (注)}$$

$$= \frac{ab}{a(\frac{1}{a} + b + 1)}$$

$$= \frac{ab}{1 + ab + a}$$

(注) 分数のなかにさらに分数が含まれていると考えにくいので、分数のなかに分数が含まれているときはとりあえず分母分子に適当な式をかけて分数のなかの分数を消去するようにしてください

$$\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + 1} \cdot \frac{ab}{ab} \quad \leftarrow \text{分母分子に } ab \text{ をかけた}$$

$$= \frac{ab \cdot \frac{1}{ab}}{ab(\frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + 1)}$$

$$= \frac{ab \cdot \frac{1}{ab}}{ab \cdot \frac{1}{b} + ab \cdot \frac{1}{ab} + ab} \quad \leftarrow \text{分母は分配法則で計算した}$$

$$= \frac{1}{a + 1 + ab}$$

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1} + \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1} \\
&= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \\
&\quad \uparrow \frac{b}{b \cdot \frac{1}{ab} + b + 1} = \frac{ab}{1+ab+a}, \quad \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab} \cdot a + \frac{1}{ab} + 1} = \frac{1}{a+1+ab} \text{ をそれぞれ代入} \\
&= \frac{ab+a+1}{ab+a+1} \quad \blacktriangleleft \text{分母がそろっているのでそのまま計算した(注)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(注) 分母がそろっているって聞けば分かったけどこんな気づかないよと思った人もいます。分数式の足し算なんだから、やれることと言えばとりあえず通分するくらいしかない。

「どうふうに通分しよう？」と分母の文字式を丁寧に見たら分母の文字式が $ab+a+1$ と同じになっていることに気づけるよね。

これで今回の解説は終わりです。今回の問題なんかでも文字消去したからってうまくいくかどうか分かんなかったよね。それでも文字消去したら、うまく求めることができました。

文字消去

数学では文字(変数)が多ければとにかく考えにくい。
文字消去できるときは、何よりもまず文字消去してから考える

本当に重要です。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください

magdai@hmg-gen.com