

# 数学の鉄則

## 「不等式の両辺に変数（文字）をかけるときの注意点」

こんにちは河見賢司です。今回の鉄則は「不等式の両辺に変数（文字）をかけるときの注意点」です。いきなりですが次の問題を解いてください。

問題 1

不等式  $\frac{x-5}{x-1} \leq 2$  を解け。

まずは典型的な誤答例を書いてみます

【誤答例】

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2$$

$x-5 \leq 2(x-1)$  ◀ 分数だと考えにくいので、両変に  $(x-1)$  をかけて分数をはらった

$$x-5 \leq 2x-2$$

$$x \geq -3$$

上記の解答はどこが間違っているかわかるかい？実は  $\frac{x-5}{x-1}$  の両変に  $(x-1)$  をかけたところが間違っているんだ。絶対にわかると思うけど次の問題を解いてみて。

問題 2

次の不等式を解け  $-2x \leq 4$

【解説】

$$-2x \leq 4$$

両辺に  $-\frac{1}{2}$  かけると（両辺を  $-2$  で割ると）

$$x \geq -2$$
 ◀ 不等号の方向が逆になった！

これで思い出して欲しいんだけど、不等式の両辺にマイナスをかけるときは不等号の方向が逆になるんだよね。

問題 1 の誤答例に戻ります。

「実は  $\frac{x-5}{x-1}$  の両変に  $(x-1)$  をかけたところが間違っているんだ」って書いたけど、 $x-1$  の正負は分かんないよね。 $x-1$  の値が正だったら不等号の向きはそのままでけど、負だったら不等号の方向は逆になるよね。

$x-1$  は正になる可能性もあるし、負になる可能性もあるんだから当然正負で場合分けが必要になってきます。数字のとき、マイナスをかけたなら不等号の方向は逆になるっていうことは忘れる人はあまりいないけど、文字になるととたんに忘れる人が多くなります。

次のことをしっかりと頭に叩き込んでおいてください。

不等式の両辺を変数（文字）をかけるときの注意点

不等式の両辺に変数をかけるときは、必ずその変数が正か負か確認をする。

以上のことを踏まえて、問題1を解いていきたいと思います。

【問題1の解答】

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2$$

(i)  $x-1 > 0$  のとき ◀  $(x-1)$  の正負によって不等号の方向が変わるから場合分けをした！

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2$$

両辺に  $x-1 (> 0)$  をかけると

$$x-5 \leq 2(x-1) \quad \leftarrow x-1 > 0 \text{ より、不等号の方向は変わらない}$$

$$x-5 \leq 2x-2$$

$$2x-x \geq -5+2$$

$$x \geq -3$$

$x-1 > 0$  つまり  $x > 1$  かつ  $x \geq -3$  より、 $x > 1$

↑ 場合分けをした  $(x-1 > 0)$  の条件のもとということを忘れないように

(ii)  $x-1 < 0$  のとき ◀  $(x-1)$  の正負によって不等号の方向が変わるから場合分けをした！

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2$$

両辺に  $x-1 (< 0)$  をかけると

$$x-5 \geq 2(x-1) \quad \leftarrow x-1 < 0 \text{ より、不等号の方向が逆になる}$$

$$x-5 \geq 2x-2$$

$$2x-x \leq -5+2$$

$$x \leq -3$$

$x-1 < 0$  つまり  $x < 1$  かつ  $x \leq -3$  より、 $x \leq -3$

↑ 場合分けをした  $(x-1 < 0)$  の条件のもとということを忘れないように

以上より  $x \leq -3, x > 1$

【注】

$x-1 > 0$ ,  $x-1 < 0$ って場合分けしたけど、それだったら  $x-1 = 0$  のときはどうなりますか？って質問されたことがあります。

これも重要だからしっかりと覚えておいて欲しいんだけど、分数に0がくることはありえないんだ。今回の問題では  $\frac{x-5}{x-1}$  ってなっているけど、これがある時点で分母の  $x-1$  は  $x-1 \neq 0$  つまり  $x \neq 1$ 。

だから  $x = 1$  は定義されないの考えなくてよい。

「分母に0がくることはない」ということをしっかりと覚えておいてください。

問題1なんですけど、実は別解がふたつあります。

ひとつ目はグラフをかいて解く方法。数学3で勉強する手法なので今回は省きます。勉強したい人は数学3の教科書の一番最初の方を見てください。グラフを使って、不等式を解く問題がたくさんのもっていると思います。

そして、ふたつ目の別解。実はこれが一番ラクです。

場合分けって基本的に同じようなことを何度かしないといけないので、面倒だよね。だから、あまり場合分けをしたくない。

実は、場合分けをせずに分母をはらう方法があります。両辺に  $(x-1)^2$  をかけたらいいんです。 $(x-1)^2$  は2乗だから当然0以上だよ。不等式の両辺に変数をかけるときは正負で場合分けをしないといけないんだけど、今回は必ず0以上だから場合分けする必要はありません。

こんなの知らなかったら絶対に気づかないと思うので、しっかりと覚えておいてください。

余談ですが、「数学解けなくてオレは頭が悪い」って言っている人のほとんどが覚えられない事柄を覚えていないんです。

今回のだって両辺に  $(x-1)^2$  をかけるなんて知らなかったら普通思いつかないよね？数学の勉強の仕方としては、まずは基本的な公式、定理、解法をしっかりと頭にいれる。

それができて始めて、いわゆる数学の思考力が必要といわれるような難しい問題に取り

組むことができるようになるのです。できない、頭が悪いと思うんじゃなくて、まずは今回話しているような基本的なことをしっかりと覚えていってください。そうすれば必ずできるようになります。

それでは別解に進みます。

【別解】

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2$$

両辺に  $(x-1)^2 (> 0)$  をかけると

本来なら  $(x-1)^2 \geq 0$  でも、今回は  $x-1 \neq 0$  が言えているので  $(x-1)^2 > 0$

$$\frac{x-5}{x-1} \cdot (x-1)^2 \leq 2(x-1)^2$$

$$(x-5)(x-1) \leq 2(x-1)^2$$

ここから展開したくなるが  $(x-1)$  が共通因数になっているので展開しない

$$2(x-1)^2 - (x-5)(x-1) \geq 0$$

$$(x-1)\{2(x-1) - (x-5)\} \geq 0 \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (x-1) \text{ でくくりだした}$$

$$(x-1)(2x-2-x+5) \geq 0$$

$$(x-1)(x+3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3, 1 \leq x$$

$$x \neq 1 \text{ より } x \leq -3, 1 < x$$

不等式の両辺を変数（文字）をかけるときの注意点

不等式の両辺に変数をかけるときは、必ずその変数が正か負か確認をする。

このことをしっかりと覚えておいてください。

これで今回のプリントは終了です。勉強おつかれさまです。これからもがんばってください。

河見賢司

数学の偏差値を50から60にするサイト

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)  
magdai@hmg-gen.com