
三角関数No10.

「$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は三角関数の第十回「$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ に関する問題」です。

「$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ に関する問題」と見ても、「なんのことやら？」と思うかもしれませんが、純粋にこの形をしている問題です。

この「$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$」は見慣れないと思うかもしれませんが、受験では本当に頻出です。ほとんどの問題集でも掲載されています。

一見難しそうですけど、解法は本当にワンパターンです。この形が出てきたら「ラッキー」と思えるようになっておいてください。

問題に進む前にこのタイプの問題を解くには、「三角関数の合成」を理解しておく必要があります。ですから、まずは合成について話したいと思います。

三角関数の合同

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ と変形できる。

ただし、$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

なんで、こんなことが言えるの？と思った人もいると思うけど、右辺を加法定理で展開をしたら確かに左辺になってくれるっていうことが確認できますよ。

【証明】

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \blacktriangleleft \text{加法定理で展開をした}\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\sin\alpha\\
&= \cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}+\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}
\end{aligned}
$$

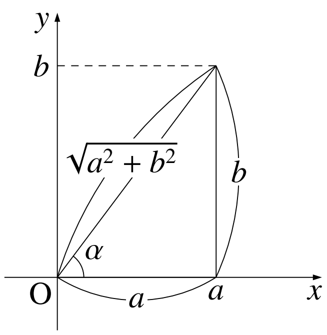
$\Uparrow \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を代入した

$= a\sin\theta+b\cos\theta=(\text{左辺})_{//}$

このように簡単に導けるからいいんだけど、$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ って長いから覚えにくいよね？知っている人もいると思うけど、実はこれは図を使って簡単に覚えることができます。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ で、$\sin\theta$ の係数 a を x 軸にかきます。次に、$\cos\theta$ の係数を y 軸にかきます。そのとき、原点と点 (a, b) を結んだ線が x 軸の正の方向となす角が α になります。

文字での説明では少し分かりにくいと思うので、実際に図をかいてみます。



$\Uparrow a\sin\theta+b\cos\theta$ で $\sin\theta$ の係数 a を x 軸にかく、$\cos\theta$ の係数 b を y 軸にかく。斜辺の長さの $\sqrt{a^2+b^2}$ は 3 平方の定理より

上図のようになりました。上図の $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ を確認してみると図より確かに

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ になっていて、$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ になっているよね。

だから、$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ なんていちいち覚える必要はないですよ。この図のやり方を覚えてさえいたら、必要ありませんから。それでは、練習のために、次の問題をやってください。

問題 1

次の式を sin で合成せよ。

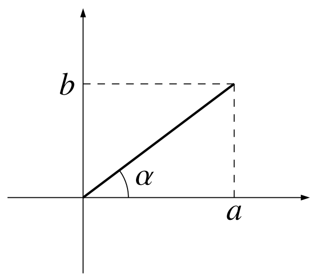
(1) $\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$　　(3) $\sin\theta - \cos\theta$

【解説】

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のような形をしているときは、まず間違いなく合成をすると思ってもらってかまいません。$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の形にすることを合成といいます。

α は次のようにしたら求めることができます。

α の求め方



ステップ１　$\sin\theta$ の係数 a を x 軸上にかく

ステップ２　$\cos\theta$ の係数 b を y 軸上にかく

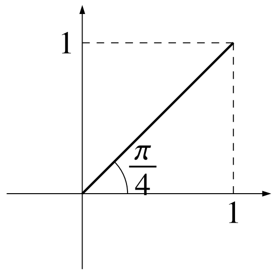
ステップ３　点 (a, b) と原点に結ぶ線分を引き、その線分が x 軸と正の向きとなす角が α となる！

上記さえ覚えておけば、三角関数の合成は簡単です。それでは、解答に進みます。

【解答】

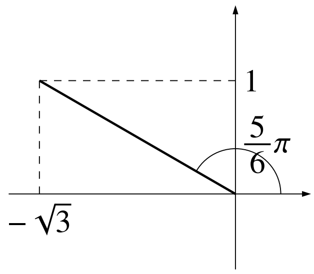
(1)

$$\sin\theta + \cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$ ◀ 合成をした



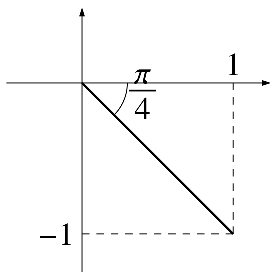
(2)

$$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \boldsymbol{2\ \sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)}$$ ◀ 合成をした



(3)

$$\sin\theta - \cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2}\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$ ◀ 合成をした



（注）
たまに cos の合成が出題されることがあります。

このときは、先ほどのように図形から求めることはできません。cos の場合 $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ の形になります。覚えてもらってもいいですけど、めったに出てきません。sin の合成と紛らわしいですし、加法定理で解くことができるので、覚える必要はないと思います。

この場合は、加法定理から考えたら導くことができます。

では、一問ほど cos の合成をしてみたいと思います。1998 年のセンター試験に実際に出題された問題です。

問題２

$\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\cos(\theta + \boxed{ウエ}^\circ)$ となる。

【解説】

センター試験の問題なので、穴埋めです。$\boxed{ウエ}^\circ$ は、cos の値が求められる角度なのでおそらく $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ のいずれかになると思います。

これらを代入して、あっているものが答えとしてもらっても解くことができますが、ここはまじめ？に解いてみたいと思います。

まず、$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ の部分ですが、これは sin の合成のときと同じく $\sqrt{a^2+b^2}$ が来るものと考えられます。

今回は $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}$ なので $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ となることが予想できます。

これでアとイが求まりました。後はウエです。これは、加法定理で右辺を展開して係数比較をするだけです。それでは、問題に進みます。

【解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 2\sqrt{2}\cos(\theta+\alpha) \\
&= 2\sqrt{2}(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \quad \blacktriangleleft \text{ 加法定理で展開した} \\
&= 2\sqrt{2}\cos\alpha\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\alpha\sin\theta
\end{aligned}
$$

左辺と右辺の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の係数を比較して

$\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos\alpha \cdots ①, -\sqrt{6} = -2\sqrt{2}\sin\alpha \cdots ②$

① より $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ よって $\alpha = 60^\circ, 300^\circ$

② より $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ よって $\alpha = 60^\circ, 120^\circ$

①, ② より $\alpha = 60^\circ$ ◀ 当然 α は ① と ② の両方とも満たす値

以上より、ア $=$ **2** イ $=$ **2**, ウエ $=$ **60**

それでは、合成の話はこのくらいにして今回の本題、$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ の問題に進みたいと思います。この問題は、次のように式変形をするのが鉄則です。

覚えるべき三角関数の解法

$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ の形のときは、

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ をそれぞれ代入して解いていく。

「なんで、そういうふうに式変形するの？」と思った人もいると思うけど、説明は後回しにしてまずは、$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ の導き方が分からないという人もいるかもしれません。

そういった人は、こちらのプリントの P.6 を見てください。
http://www.hmg-gen.com/sankakukousiki.pdf

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ はすべて、２倍角の公式を式変形していっているだけです。

なぜ、$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ をそれぞれ代入して解いていくのか実際にやってみれば、分かると思いますがこうすることにより $a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ は $A\sin 2\theta + B\cos 2\theta + C$ の形に式変形をすることができます。

ここからは単に合成をするだけで解けてしまいます。それでは、以下の問題を解いてください。

問題 3

$f(\theta) = \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解答】

＊これは、先ほど言ったように $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を代入して解いていきます。

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta \\
&= \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1+\cos 2\theta}{2}
\end{aligned}
$$

⇑ $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ をそれぞれ代入した。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3}\sin 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \\
&= \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta \\
&= 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

◀ 合成をした

$-1 \leqq \sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ より

$-2 \leqq 2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 2$ つまり $-2 \leqq f(\theta) \leqq 2$

よって $f(\theta)$ の最大値は **2**, 最小値は **−2** である。

【注】

上記では、$-2 \leqq f(\theta) \leqq 2$ から、最大値 2、最小値 −2 といきなりかきました。ですが、不等式で最大値・最小値を求めるときは、等号が成立する θ が存在するときに、最大値や最小値が存在します。

例えば、$f(x) \leqq 2$ であっても、$f(x)$ の最大値は 2 とは言えません。「$f(x) \leqq 2$ かつ $f(x) = 2$ となる x が存在する」このときにはじめて、$f(x)$ の最大値が 2 であると言えます。

だから、不等式を使って最大値・最小値を求めるときは等号成立条件を言及しておかないといけません。ただ、今回の場合、θ の範囲は問題で言及されていません。

そんなとき、$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1$ となる θ が存在することはあきらかです。こんな場合は、答案で等号成立条件を述べなくても大丈夫だと思います。心配な人は、答案で簡単に言及しておけば OK です。

これで、今回の解説プリントは終わりです。このタイプの問題は知らなければまず解けないと思います。今回の問題に限らず、数学は知っているかどうかということだけで決まってくる問題も多いです。まずは、こういった基本的な解法をひとつずつ頭に入れていってください。

次回は、円の媒介変数表示に関する問題を解説します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司