三角関数No11.
「円の媒介変数表示に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は三角関数の第１１回「円の媒介変数表示に関する問題」です。

意外に知らない人が多いですが、円上の点は三角関数の媒介変数表示で表すことができます。と言っても、本当に簡単なのでごくごく簡単に理解できると思いますよ。

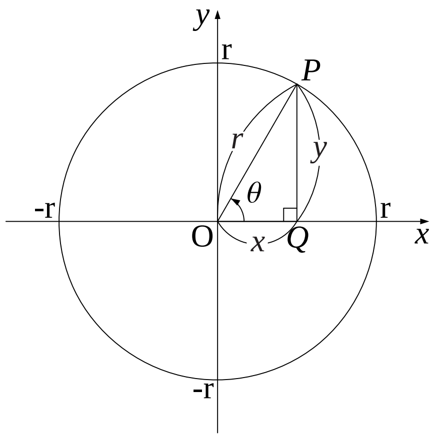
それでは、今回の本題に進みます。いきなりですが、次の事柄を覚えてください。

円の媒介変数表示

$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x, y) は、$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表される。

いきなり、こんなこと言われても分からないかもしれません。ですが、三角関数の定義を考えればあきらかですよ。

三角関数の定義



$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

三角関数の定義より

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

が成立します。

では、この媒介変数表示を使って次の問題を解いてください。

問題１

$x^2+y^2=1$ のとき、$x+3y$ の最大値、最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ

【解説】
この問題は、多くの人が数学 II の「図形と式」で解くと思います。

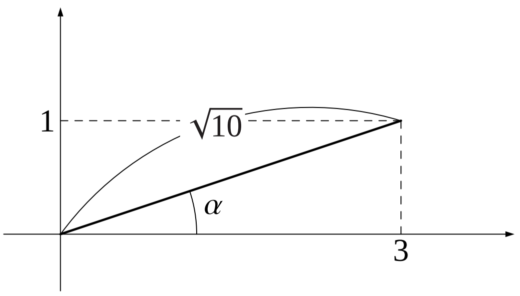
もちろん、その解き方でいいのですが (むしろ図形と式の解法の方が一般的かも？)、今回は「円の媒介変数表示」の練習のため、三角関数の解法で解いてもらいます。

まず、三角関数の解法で解いた後に、「図形と式」でも解いてみたいと思います。たまに「図形と式」で解けるからＯＫと思う人もいますが、この三角関数の媒介変数表示を使った解法を使わないと解けない問題も出題されます (例えば、後ほど紹介する問題２)。それほど難しい解法でないので、しっかりと理解しておいてください。

では、問題を解いていきます。これは先程の媒介変数表示を使うだけです。今回は、半径が 1 なので、円上の点は $(x, y)=(\cos\theta, \sin\theta)$ と表すことができます。後は、三角関数の合成をして解いていくだけです。

$x+3y=\cos\theta+3\sin\theta$ ◀ $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ をそれぞれ代入した

$\quad=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$ ◀ 合成をした



ただし、α は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ を満たす。

⇑ 合成したとき α の角度が分からないときもあります。

$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$

$-\sqrt{10}\leqq\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)\leqq\sqrt{10}$

これより、最大値が $\sqrt{10}$、最小値が $-\sqrt{10}$ であることが分かりました。で、ここからそれらを与える (x, y) を求めていきます。少し、面倒ですけど頑張って理解してください。

(x, y) ですが、$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ って表せたんだから $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値さえ分かれば (x, y) の値を求めることができるよね。

そこで、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めたいんだけど、どうしようかな？今は、最大値を求めています。最大値をとるのは $\sin(\theta+\alpha) = 1$ のときだよね。で、$\sin\theta = 1$ となるのは $\theta+\alpha = \frac{\pi}{2}$ のときなるよね。この式より、$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のときって最大値をとるということが分かります。

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めたいんだけど、$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ の値なら求めることができます。なぜなら、$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ の値はもうすでに与えられているからです。それでは、$\sin\theta$ の値と $\cos\theta$ の値を求めていきたいと思います。

$\sin\theta$

$= \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ◀ $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ を代入した

$= \cos\alpha$ ◀ (注) を見よ

$= \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(注) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ となるのを暗記している人も多いと思います。もちろん、これはよく出てくるので暗記してもいいのですが、これは加法定理から簡単に導くことができますよ。意外に知らない人も多いと思うので、覚えておいてください。

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$ ◀ 加法定理で展開をした

$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$ ◀ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ より

$= \sin\theta$ ◀ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ が導けた

同様に $\cos\theta$ の値も求めることができます。

$\cos\theta$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ◀ $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ を代入した

$= \sin\alpha$

$= \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

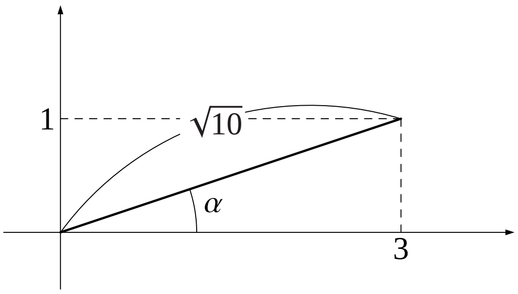
このようにすれば問題を解くことができます。それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$x^2 + y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおく

$x + 3y = \cos\theta + 3\sin\theta$ ◀ $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ をそれぞれ代入した

$= \sqrt{10}\sin(\theta + \alpha)$ ◀ 合成をした



ただし、α は $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ を満たす。

⇑ 合成したとき α の角度が分からないときもあります。

$-1 \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$

$-\sqrt{10} \leqq \sqrt{10}\sin(\theta + \alpha) \leqq \sqrt{10}$

また、最大となるときは $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta$

$= \sin(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$ ◀ $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ を代入した

$= \cos\alpha$

$= \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta$

$= \cos(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$ ◀ $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ を代入した

$= \sin\alpha$

$= \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

また、最小となるときは $\theta + \alpha = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$\sin\theta$

$= \sin(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha)$ ◀ $\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha$ を代入した

$= -\cos\alpha$

$= -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta$

$= \cos(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha)$ ◀ $\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha$ を代入した

$= -\sin\alpha$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

以上より、$(x, y) = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ のとき、最大値 $\sqrt{10}$ をとり、
$(x, y) = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ のとき、最小値 $-\sqrt{10}$ をとる。

それでは、この問題を数学 II の「図形と式」の解法で解いておきたいとおもいます。今回は、三角関数のプリントなので詳しい解説は割愛しておきます。

【「図形と式」を使った解法】
$x + 3y$ が k という値をとりうる
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$ かつ $x + 3y = k$ をみたす実数 (x, y) が存在する
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$ と $x + 3y = k$ が共有点をもつ

以下、$x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ① が $x + 3y = k \cdots$ ② と共有点をもつような k の範囲を求めることにする。

ここからは、$x^2 + y^2 = 1$ と $x + 3y = k$ のグラフをかいてという解法もありますが、今回は数式が簡単なので、数式のまま解いていきます。もちろん図形で考えてもらってもいいですよ

② より、$x = k - 3y$。これを ① に代入して

$$(k - 3y)^2 + y^2 = 1$$

$$k^2 - 6ky + 9y^2 + y^2 = 1$$

$$10y^2 - 6ky + k^2 - 1 = 0$$

判別式を D とすると、共有点をもつには $D \geqq 0$ であればよい。

$$\begin{aligned} D/4 = (-3k)^2 - 10 \cdot (k^2 - 1) &\geqq 0 \\ -k^2 + 10 &\geqq 0 \\ k^2 - 10 &\leqq 0 \\ (k - \sqrt{10})(k + \sqrt{10}) &\leqq 0 \\ -\sqrt{10} \leqq k &\leqq \sqrt{10} \end{aligned}$$

よって、最大値 $\sqrt{10}$、最小値 $-\sqrt{10}$ となる。

$x^2+y^2=1,\ x+3y=\sqrt{10}$ を解くと $(x,y)=(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$

$x^2+y^2=1,\ x+3y=-\sqrt{10}$ を解くと $(x,y)=(-\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$

以上より、$(x,y)=(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$ のとき、最大値 $\sqrt{10}$ をとり、
$(x,y)=(-\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$ のとき、最小値 $-\sqrt{10}$ をとる。

それでは、今回の最後の問題として次の問題を解いてください。この問題は、先ほどの問題と違い数学 II の解き方では解くことができません (ひょっとしたら解けるかもしれませんが、できたとしてもものすごく面倒！)。三角関数の解法で解くしかないです。

問題 2

実数 x, y が $x^2+y^2=1$ をみたすとき、$3x^2+4xy+5y^2$ の最大値と最小値を求めよ

【解説】
この問題も $x^2+y^2=1$ となっているので、$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ とおくことができます。

$3x^2+4xy+5y^2=3\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta$ となります。

ここから $5\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ の最大値と最小値を求めるのですが、
この $5\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ を見た瞬間に次の事柄が思いつかないといけません。

覚えるべき三角関数の解法

$a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ の形のときは、

$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ をそれぞれ代入して解いていく。

これは、http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf に詳しく解説をしています。

この問題は、上の知識を使って解いていくだけですので、簡単です。それでは、解答に進みます。

【解答】
$x^2+y^2=1$ 上の点を $(x, y)=(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく

$$3x^2+4xy+5y^2$$
$$=3\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+5\sin^2\theta$$
$$=5\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$$
$$=5\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+4\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+3\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}$$

⇑ $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ をそれぞれ代入した。

$$=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\theta$$
$$=2\sin 2\theta-\cos 2\theta$$
$$=\sqrt{5}\sin(2\theta-\alpha)+4\ (\text{ただし、}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}})$$

ここで、
$-1\leqq\sin(2\theta-\alpha)\leqq 1$ ◀ θ は全範囲を動くので、当然 -1 以上 1 以下の範囲となる

$-\sqrt{5}\leqq\sqrt{5}\sin(2\theta-\alpha)\leqq\sqrt{5}$ ◀ 全ての辺に $\sqrt{5}$ をかけた

$-\sqrt{5}+4\leqq\sqrt{5}\sin(2\theta-\alpha)+4\leqq\sqrt{5}+4$ ◀ 全ての辺に 4 を加えた

よって、最大値 $\sqrt{5}+4$、最小値 $-\sqrt{5}+4$

(注) 最大値、最小値問題ではどんなときでも、最大、最小を与える θ を求めようとする人がいるけど、問題文に「それを与える θ の値を求めよ」と書かれていない限り基本的には求める必要はないですよ。

基本的にはとかいた意味なんですが、特に学校では、問題文に書かれていなくても毎回書くように指導している先生がいます。本当に簡単に求められる時は、書いておいた方がベターかもしれません。

今回の解説プリントは以上です。問題を見ると難しそうに思えたかもしれませんが、実際解いてみたらごくごく簡単だったということが分かったと思います。

数学って全般的にそうなんですが、「難しい」という以前にただ単に「知らない」というだけの人が多いです。

まずは、こういったものをひとつずつ覚えていけば自然と成績があがっていきます。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com