三角関数No12.
「円の媒介変数表示に関する問題　その２」

こんにちは、河見賢司です。今回は三角関数の第１２回「円の媒介変数表示に関する問題　その２」です。

前回は、円の式が与えられている時の媒介変数表示でした。詳しくは、http://www.hmg-gen.com/sankaku11.pdf を見て欲しいのですが、復習をすると次のようになります。

円の媒介変数表示

$x^2+y^2=r^2$ 上の点は $(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表すことができる。

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点は $(x, y)=(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ と表すことができる

$(x, y)=(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ は、前回のプリントでは話しませんでしたが、$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は $x^2+y^2=r^2$ を x 軸方向に $+a, y$ 軸方向に $+b$ 平行移動させたものと考えると明らかだと思います。たまに出題されるので覚えておいてください。

それでは、本題に進みたいと思います。問題を使って解説をしていこうと思います。

問題１

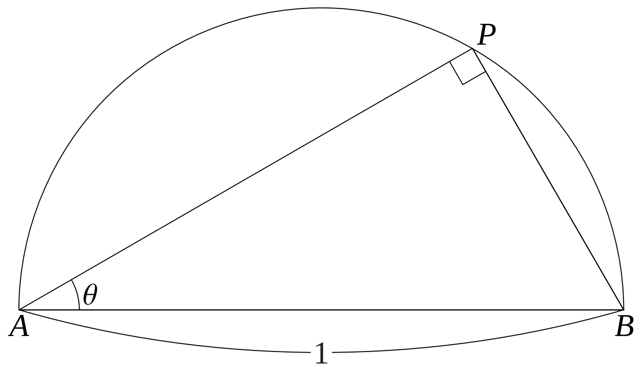
長さ１の線分 AB を直径とする半円周上の１点を $P\,(P \fallingdotseq A, B)$。$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とするとき、以下の問いに答えよ

(1) AP, BP をそれぞれ θ を用いて表せ

(2) θ の値の範囲を求めよ

(3) $AP+\sqrt{3}BP$ の値の範囲を求めよ

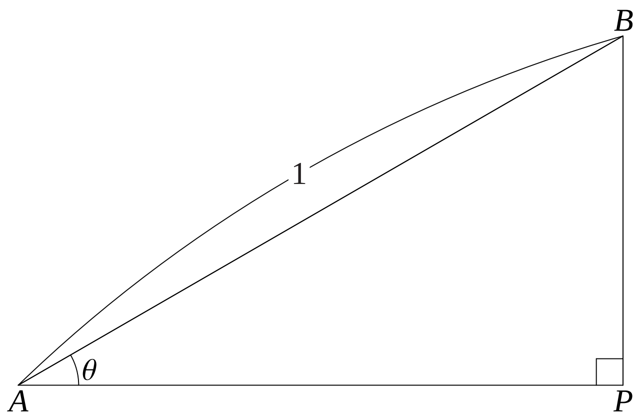
【(１) の解説】
まず、図形をかいてみます。



上図のようになります。P は円周上の点なので、∠APB = 90° となります。円周角の性質は中学校のときに勉強したよね。高校数学でも意外に出てくる (センター試験の平面図形など) ので覚えておいてください。

ここまで、きたら AP, BP の長さはすぐに分かるという人もいると思うけど、一応説明しておきます。

まず、三角形 ABP を見やすいように以下のように回転させます。



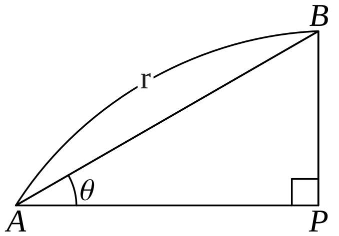
上記だったら、三角関数の定義よりすぐに次のことが分かると思います。

$$\sin\theta = \frac{BP}{AB} = \frac{BP}{1} \qquad \therefore\ BP = \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{1} \qquad \therefore\ AP = \cos\theta$$

この結果は、物理を勉強をしている人ならすぐに出てきたと思います。数学でも、出てくるので覚えておいた方がいいと思います。

辺の長さ



上図のように、斜辺の長さが r で、$\angle \mathrm{PAB} = \theta$ のとき、$AP = r\cos\theta,\ BP = r\sin\theta$ となる。

⇑ 導き方は、さっきと同じように三角関数の定義より導くことができます。自分で確認をしておいてください。

【(1) の解答】

$AP = \cos\theta,\ BP = \sin\theta$

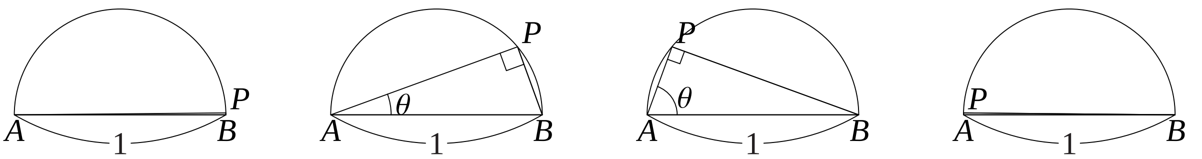
【(2) の解説】

今回の問題は $\angle \mathrm{PAB}$ の値の範囲を求めよだけど、分かるかな。

とりあえず三角形の内角の和は $180°$ なので、$\angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{ABP} + \angle \mathrm{BPA} = 180°$ ってなるよね。また、AB は直径なんだから P の位置によらず $\angle \mathrm{APB} = 90°$ となります。

これより、$\angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{PBA} = 90°$ となります。ここまでは、分かるよね。で、ここから考えていきます。

まず、P は A, B を除く半円周上を動くんだけど、P が B から A に向けて動くとして、簡単に図示してみたいと思います。



上図のようになったけど、一番左側のときは P がわずかにだけ B よりも上側にあるとき、このときって $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ の大きさはほとんど 0 なんじゃない？だから、$\theta > 0$ となります。

そこから、P が A に向かうにつれて $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ の値はどんどん大きくなります。そして、一番右の図のように、P が A のわずかに上側にきたとき θ の値が最大になるよね。この

とき、図から判断して $\angle\mathrm{PBA}$ の大きさはほとんど 0 になります。

問題文に P は A, B とは一致しないと書いてあるので $\angle\mathrm{PBA} = 0°$ となることはないけど、ほとんど 0 になります。このとき、さっきの $\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{PBA} = 90°$ という関係式から $\angle\mathrm{PBA}$ がほとんど $0°$ になるとき $\angle\mathrm{PAB}$ はほとんど $90°$ になるよね。

以上より、$\angle\mathrm{PAB}$ の値の範囲は $0° < \angle\mathrm{PAB} < 90°$ となります。これは、よく出てくるので考え方をしっかりと理解しておいてくださいね。

【(2) の解答】
$0° < \theta < 90°$

【(3) の解説】
この問題は、(1) で AP, BP を求めて、(2) で θ の値の範囲を求めたのでこれらの結果を使って解いていくだけの、ごくごく簡単な問題です。ほとんどの人が解けると思うけど、丁寧に解いていきます。

まず、この問題の考え方ですが、「値の範囲を求めよ」という問題です。

関数の「値の範囲を求める」や「最大値、最小値」問題では、グラフをかいて解いて求めるということが基本です。

で、グラフをかこうかなと思うんだけど $AP + \sqrt{3}\,BP = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ のグラフっていきなりかけないよね。

これは、合成をまずします。$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形をみたら、すぐに合成を思いつけるようにしておいてください。合成について知らないという人は、http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf を見てください。

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin(\theta + 30°)$ となります。$y = \sqrt{2}\sin(\theta + 30°)$ のグラフだったらかくことができます。

でも、次のように考えたらもっと簡単になります。$y = \sqrt{2}\sin(\theta + 30°)$っていうのは $y = \sin(\theta + 30°)$ を $\sqrt{2}$ 倍したものです。今回は $y = \sqrt{2}\sin(\theta + 30°)$ の値の範囲を求めたらいいんだけど、まずは $y = \sin(\theta + 30°)$ の値の範囲を求めてそれを $\sqrt{2}$ 倍しても当然ＯＫだよね。

で、$y = \sin(\theta + 30°)$ のグラフをかけばいいんです。このグラフは $y = \sin\theta$ を θ 軸方向に $-30°$ 平行移動したものだから ((注) 平行移動は大丈夫だよね。もし分からない人は

http://www.hmg-gen.com/heikouidou.pdf を見てください。) かくことも可能です。

このくらいなら簡単に解けるのでいいのですが、ここでは練習のためあえて文字を置き換えをして解いていくことにします。

この $y = \sin(\theta + 30°)$ なんですが、$\theta + 30° = X$ とでもおきかえると $y = \sin(\theta + 30°)$ は $y = \sin X$ となります。これだったら、簡単にグラフを簡単にかくことができるよね。

ただ、文字を置き換えたときは、絶対に注意しないといけないことがあります。

文字を置き換えたときの注意点

文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の範囲に注意する

今回は θ に $0° < \theta < 90°$ という範囲がありました。$X = \theta + 30°$ とおいたのですが、X には当然 $30° < X < 120°$ という値の範囲があります。

このことより、$y = \sin(x + 30°)$ の $0° < \theta < 90°$ における値の範囲は、$y = \sin X$ の $30° < X < 120°$ における値の範囲と一致します。

文字の置き換えは本当に便利です。ただ、**文字を置き換えたときは範囲に注意する**これだけは、忘れないようにしておいてください。それでは、解答に進みます。

【(3) の解答】

$AP + \sqrt{3}BP$

$= \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ ◀ (1) より、$AP = \cos\theta,\ BP = \sin\theta$ をそれぞれ代入した

$=2\sin(\theta + 30°)$ ◀ 合成をした

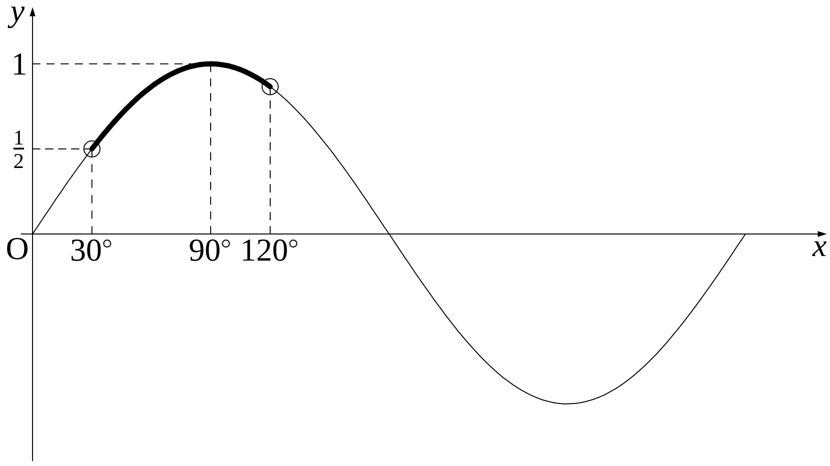
ここで $X = \theta + 30°$ とする。

$0° < \theta < 90°$

$30° < \theta + 30° < 120°$ ◀ X の値の範囲を求めるためにすべての辺に $30°$ を加えた

$30° < X < 120°$ ◀ X の値の範囲が求まった！

$y = \sin X\ (30° < X < 120°)$ のグラフをかくと次のようになる。



グラフより、$\sin X$ の値の範囲は $\frac{1}{2} < \sin X \leqq 1$ となる。

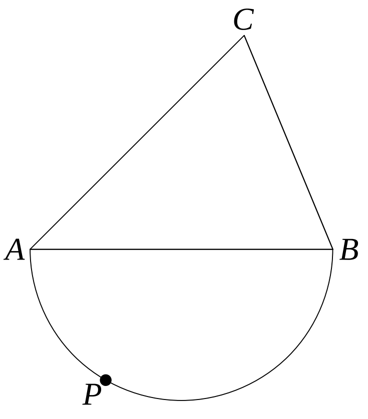
$AP + \sqrt{3}BP = 2\sin X$ を考え、求める値の範囲は $1 < AP + \sqrt{3}BP \leqq 2$ となる。

この問題 1 には、(1),(2) と誘導問題がありましたが、実際の入試問題ではこんなに丁寧に誘導を書いてくれないことがほとんどです。

この類の問題がきたら、何もかかれていなくても自分で思い出せるようになっておいてください。それでは、練習問題としてもう 1 問解いておきたいと思います。

問題 2

下図のように $\angle \mathrm{A} = 45°$, $AB = AC = 1$ の三角形 ABC と辺 AB を直径とする半円の周上に点 P がある。

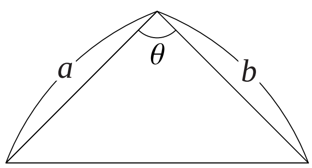


(1) $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ として、三角形 APC の面積 S を θ を用いて表せ

(2) S を最大にする θ を求め、そのときの S の値を求めよ

【(1) の解説】
まず、問題をみたら三角形の面積を求めよとなっています。三角形の面積と言えば次のことを思い出さないといけません。

三角形の面積



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

このことより、「**ああ、三角形の面積を求めるにはひとつの角の大きさとその両端の辺の長さが必要なんだな**」となっておくようにしてください。

そのことを頭にいれて、あらためて図を見てみると今回の問題では $AC = 1$ と長さが分かっていて、$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{CAB} + \angle \mathrm{BAC} = 45° + \theta$ ということが分かっています。

三角形の面積を求めるには、ひとつの角の大きさとその両端の辺の長さが必要なんだから、後は AP の長さをなんとか求めることができたら、三角形の面積を θ を使って表すことができます。

で、ここで問題 1 で解説をした知識を使います。$AB = 1$ で、P は半円の周上にいるんだよね。ということは $AP = AB\cos\theta = \cos\theta$ と表されるんじゃないかな。

これに気づければ、今回の問題は終了です。

少し余談ですが、数学の問題を解くときは常に自分が今何をしようとしているのかということを意識しながら解くようにしてください。

今回の問題だと、三角形の面積を求めるには、ひとつの角とその両端の辺の長さが必要、そうするにはどうしよう？と考えていきます。

数学があまり得意でないという人に教えていると、本当にいきあたりばったりです。「どうしてこうしたの？」と聞くと「なんとなく」と答えます。

なんとなくできそうな式変形をしていても絶対にできるようになりません。問題を解くときは、常に式変形の根拠を考えながら解くようにしてください。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】
P は AB を直径とする半円の周上にあるので $AP = AB\cos\theta = \cos\theta$ とおける。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AP\cdot\sin\angle\mathrm{CAP}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos\theta\cdot\sin(\theta+45^\circ)\\
&= \frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta\cos 45^\circ+\cos\theta\sin 45^\circ) && \blacktriangleleft \text{加法定理で展開をした}\\
&= \frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta) && \blacktriangleleft \text{これが答え}
\end{aligned}
$$

【(2) の解説】
P は半円の周上を動くので、問題 1 と同じく θ の値の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 90^\circ$ となります。今回は両端の A, B を除くと問題文にかかれていないのでイコールを含みます。

で、ここから考えていくんですけど、$\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$ を見た瞬間に解き方が思いつかないといけません。

これって $a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ の形をしているよね。この形をしている時は、解法が決まっていたよね。本当に重要だから覚えておかないとダメなんですけど、これは $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を代入して解いていきます。

これを知らないという人は、http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf に詳しく解説しています。これだけ知っていれば今回の問題は十分に解くことができるので、解答に進みたいと思います。

【(2)の解答】
P は半円の周上を動くので $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$

(1) より $S=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$。$\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$ が最大となるとき、S も最大となる。以下、$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$ として、$f(\theta)$ の最大値を考える。

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\
&= \frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta+1) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)+1\right\} \quad \blacktriangleleft \text{ 合成をした} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta+45^\circ)+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ここで、$f(\theta)$ は $\sin(2\theta+45^\circ)$ が最大になるときに最大となるので、以下 $\sin(2\theta+45^\circ)$ の最大値を考える。
ここから、最大値・最小値問題なのでグラフをかいて考える。でも、$\sin(2\theta+45^\circ)$ のグラフはかきにくいので、$2\theta+45^\circ=X$ とでも置き換えて解いていきます。

ただ、置き換えたときは範囲に注意するということを忘れないように！考え方としては、問題 1 とまったく同じだよね

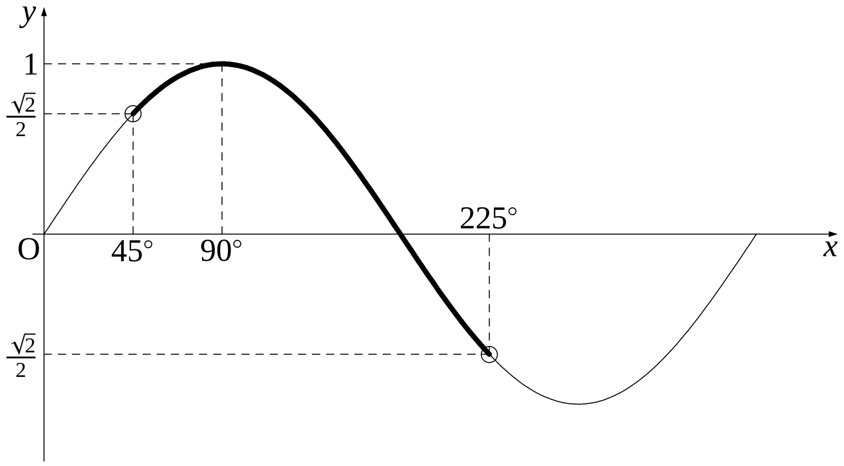
ここで、$X=2\theta+45^\circ$ とする。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$

$0^\circ \leqq 2\theta \leqq 180^\circ$ ◀ 全ての辺を 2 倍した

$45^\circ \leqq 2\theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ ◀ 全ての辺に 45° を加えた

$45^\circ \leqq X \leqq 225^\circ$ ◀ X の値の範囲が求まった！



グラフより、$sinX$ は $X = 90^\circ$ のとき、最大値 1 をとる。

$f(\theta)$ は、$X = 2\theta + 45^\circ = 90^\circ$ つまり $\theta = 22.5^\circ$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ をとる。

このとき、

$$S = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

以上より、$\theta = 22.5^\circ$ のとき、S は最大値 $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}$ をとる。

これで、今回の解説プリントは終わりです。どうだったでしょうか。これまでの三角関数の知識がいろいろと必要だったと思います。でも、覚えるべきことさえ覚えていたら簡単に解けたと思います。

数学は、まずはこういった基本的な解法を完璧に頭に入れることを優先して下さい。そうして、始めて思考力が必要な難しい問題も考えられるようになります。がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com