三角関数No13.
「$\theta = 18^\circ$ に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第１３回で $\theta = 18^\circ$ に関する問題です。

$\theta = 18^\circ$ に関する問題とは、$\sin 18^\circ$ を求めなさいよという問題です。

三角関数の値で求められるのは $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ などの特別な角度のみです。それ以外にも、例えば $\sin 15^\circ$ だと、$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ とすることによって、加法定理を使って求めることができます。

でも、この 18° というのは加法定理や半角の公式などを考えても求められそうにありません。これって知らないとまず求めることができないと思いますけど、実は $18^\circ \times 5 = 90^\circ$ を使って求めていきます。

18° の求め方

$\theta = 18^\circ$ のとき、$5\theta = 90^\circ$ ということを利用する！

それでは、これを踏まえて次の問題を解いてみてください。

問題

$\sin 18^\circ$ の値を求めよ

【解説】
これは、さっき話したように $5\theta = 90^\circ$ を使って解いていくだけです。簡単に解説をしていきます。

$5\theta = 90^\circ$ としました。これから、どうしようかな？と考えるんだけど 5θ なんて言われてもよく分かんない。でも、2θ や 3θ なら、２倍角や３倍角の公式があるので求めることができるよね。

そこで、$5\theta = 2\theta + 3\theta$ とします。

$5\theta = 90^\circ$ より、$2\theta + 3\theta = 90^\circ$ となります。これを変形して $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ とします。

「なんで $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ ってしたの？$3\theta = 90^\circ - 2\theta$ ってしたらダメなの？」と思われたかもしれません。

これから式変形をしたら分かりますが、$3\theta = 90^\circ - 2\theta$ってしたらうまく解けないんです。$2\theta = 90^\circ - 3\theta$ ならうまくいきます。

これはもう、理屈じゃなく覚えるしかありません。ただ、２通りしかないので、両方やってみてうまくいったらＯＫで、うまくいかなければもう一方の方をやってみる、忘れてしまっていたらそんな感じでもいいですよ

$2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$

$\Uparrow$ 2θ と $90^\circ - 3\theta$ の値が等しい時、当然 $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$ も成立

$\sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$ です。これは暗記してもらってもいいですが、いちいち加法定理で展開をしてもらってもいいですよ。分からないという人は、http://www.hmg-gen.com/sankaku90.pdf を見てください。

これで $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ となりました。後は、それぞれ２倍角の公式３倍角の公式を適用するだけです。２倍角や３倍角の公式は暗記しておかないといけません。もし、知らないという人は http://www.hmg-gen.com/sankakukousiki.pdf を見てください。

$\sin 2\theta = \cos 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$ ◀ ２倍角の公式、３倍角の公式より

ここで、全ての項に $\cos\theta$ が含まれているので両辺を $\cos\theta$ で割ることにします。

両辺を文字で割るときは、その文字が０になるかどうか確認をする必要があります。今回は、$\theta = 18^\circ$ なので、$\cos\theta \fallingdotseq 0$ です。よって、両辺を $\cos\theta$ で割ってもＯＫです。

$2\sin\theta\cos\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

$2\sin\theta = -3 + 4\cos^2\theta$ ◀ 両辺を $\cos\theta$ で割った！

で、ここからなんですけど、問題は $\sin\theta$ の値を求めよなんだよね。ということは、与式を $\sin\theta$ のみの式にして、そのできた方程式を解いていけば $\sin\theta$ の値は求めることができるよね。

$2\sin\theta = -3 + 4\cos^2\theta$ で $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を代入すれば、$2\sin\theta = -3 + 4(1 - \sin^2\theta)$ となってくれます。後は、この方程式を解けば $\sin\theta$ の値を求めることができます。

ながながと説明をしてきましたが、この問題は $18^\circ \times 5 = 90^\circ$ ということだけを覚えてお

けば簡単ですよ。試験にも意外に出てくるので理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】
$\theta = 18^\circ$ とする。

$5\theta = 90^\circ$

$2\theta + 3\theta = 90^\circ$

$2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$

$\sin 2\theta = \cos 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

ここで $\cos\theta \fallingdotseq 0$ より、両辺を $\cos\theta$ でわると

$2\sin\theta = -3 + 4\cos^2\theta$

$2\sin\theta = -3 + 4(1 - \sin^2\theta)$

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

解の公式より

$$\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ここで $\sin\theta > 0$ より ◀ $\theta = 18^\circ$ より、当然 $\sin\theta > 0$

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ ◀ これが答え

これで今回の解説プリントは終わりです。18° の解き方を説明しましたが、これと同じ方法で 36° や 72° も求めることができます。

それほど、頻出という訳ではありませんが、たまに出てきますので、ぜひともしっかりと覚えておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com