三角関数No14.
「三角関数の連立方程式」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第１４回で「三角関数の連立方程式」です。いきなりですが、次の問題を解いてください。

問題１

次の連立方程式を解け。ただし、$0 \leqq x, y \leqq 2\pi$ とする。

$$\begin{cases} \sin y - \cos x = -1 \\ \sin x + \cos y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

まず、どうしようと考えるんだけど、変数が２つあったときの連立方程式って式が２つ必要だったよね。変数が３つのときは、式が３つ必要だったと思います。

一般に、**変数が n 個のとき、その変数を求めるには最低でも式が n 個必要**という事実があります。

このことを頭に入れて、問題を見てみると変数が $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ の４つがあるよね (変数は x, y の２つだと思うかもしれませんが、今回は $\sin x$ と $\cos x$ を別々のものと考えました)。

今回は、式が２つしかなくて変数が４つあるから、普通だったらこんな式は解くことができない！(さっき話したように、変数４つを決定するには、最低４つの式が必要)

もし、これが何の関係もなかったら解くことはできないんだけど、今回は三角関数です。与えられた式以外にも三角関数の相互関係の式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ っていう関係式があるよね。

これで、与えられた式が４つできたので、変数４つを求めることができます。

ここから、まじめ？に解いていってもいいのですが、連立方程式は式が３つの３元連立でもかなり面倒だったと思います。４元連立になるとさらに面倒になるので、三角関数の性質をいろいろと工夫しながら解いていくことにします。

(＊) この三角関数の連立方程式には、いろいろな解き方があります。これから、解説す

るような解き方で解いてもらってもいいですし、もう他の解き方を理解していてそっちで解くというのなら別にかまいません。

どういった解き方でもいいので、しっかりと自分のものにしておいてください。

$$\begin{cases} \sin y - \cos x = -1 \cdots ① \\ \sin x + \cos y = -\sqrt{3} \cdots ② \end{cases}$$

この連立方程式で、とりあえず x, y が入っているとどちらかを消去して、文字をひとつに統一します。x と y のどっちを文字消去してもらってもいいですけど、とりあえず y を消去することにします。

文字消去の仕方は ① より $\sin y = \cos x - 1 \cdots ①'$ と ② より $\cos y = -\sin x - \sqrt{3} \cdots ②'$ とします。

①′, ②′ を三角関数の相互関係の式 $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入をすると y を消去して x のみの式にすることができます。とりあえずこの作業をしてみます。

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$(\cos x - 1)^2 + (-\sin x - \sqrt{3})^2 = 1$ ◀ ①′ と ②′ をそれぞれ代入した

$\cos^2 x - 2\cos x + 1 + \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x + 3 = 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 3 = 0$

$1 + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 3 = 0$ ◀ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$

とりあえず、何も考えずにただ単に式変形をしてここまでたどりつきました。で、ここからどういうふうに解いていくかですが、$\sin x$ と $\cos x$ に何の関係式もないのなら純粋に４元連立の方程式を解いていくしかありません。

でも、最初にいったように４元連立の方程式ってけっこうメンドウなんです。もちろん、これでも解けないことないけど、三角関数ということを利用して解いていこうと思います。

で、もう一度 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$ を見ると、これって三角関数の合成が使えるタイプだよね。だから、とりあえず合成を使って解いていこうと思います。合成についてよく分からない、という人は http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf を見て勉強して下さい。

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$

$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -2$

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$

$x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}\pi$

$x = \dfrac{5}{3}\pi$

これで、x の値を求めることができました。次に、y の値を求めていきたいとおもいます。
①′ にでも、代入して y の値を求めていきたいと思います。

$$\begin{aligned}\sin y &= \cos\frac{5}{3}\pi - 1\\ &= \frac{1}{2} - 1\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

これで、$(x, y) = \left(\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi\right), \left(\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$ が答えかな？と思ってしまいますが、これはまだ解の候補です。

連立方程式は ① と ② を満たしていた始めて解と言えます。今回は、まだ ① を満たしているということしか言えていません。ですから、ここから ② を満たしているかと確認をする必要があります。

三角関数の連立方程式の問題で、今回のように答えがふたつあるとき、多くの場合でどちらか一方のみが答えになるということが多いです。それでは、ここから、どちらが解になるかということを確認していきたいと思います。

(ｉ) $(x, y) = \left(\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$ のとき

$\sin x + \cos y = \sin\dfrac{5}{3}\pi + \cos\dfrac{7}{6}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$
このとき、② は成立する。よって解となる。

(ii) $(x, y) = \left(\frac{5}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\right)$ のとき

$\sin x + \cos y = \sin \frac{5}{3}\pi + \cos \frac{11}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
このとき、② は不成立。よって、不適

以上より、この連立方程式の解は $(x,\ y) = \left(\frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi\right)$ ◀ これが答え

今回はこれで終了です。三角関数の連立方程式は、今回のものより少し複雑になるものもありますが、解き方は同じなので、この問題さえ解くことができたらどういった問題でも解けるようになります。

少し変わった解き方をします。忘れやすいので、しっかりと暗記するまで繰り返すようにしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com