

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

---

## 三角関数No14. 「三角関数の連立方程式」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第14回で「三角関数の連立方程式」です。いきなりですが、次の問題を解いてください。

### 問題1

次の連立方程式を解け。ただし、 $0 \leq x, y \leq 2\pi$ とする。

$$\begin{cases} \sin y - \cos x = -1 \\ \sin x + \cos y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

まず、どうしようと思えるんだけど、変数が2つあったときの連立方程式って式が2つ必要だったよね。変数が3つのときは、式が3つ必要だったと思います。

一般に、変数がn個のとき、その変数を求めるには最低でも式がn個必要という事実があります。

このことを頭に入れて、問題を見てみると変数が $\sin x, \cos x, \sin y, \cos y$ の4つがあるよね(変数は $x, y$ の2つだと思いかもしれませんが、今回は $\sin x$ と $\cos x$ を別々のものと考えました)。

今回は、式が2つしかなくて変数が4つあるから、普通だったらこんな式は解くことができない!(さっき話したように、変数4つを決定するには、最低4つの式が必要)

もし、これが何の関係もなかったら解くことはできないんだけど、今回は三角関数です。与えられた式以外にも三角関数の相互関係の式  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  という関係式があるよね。

これで、与えられた式が4つできたので、変数4つを求めることができます。

ここから、まじめ？に解いていってもいいのですが、連立方程式は式が3つの3元連立でもかなり面倒だったと思います。4元連立になるとさらに面倒になるので、三角関数の性質をいろいろと工夫しながら解いていくことにします。

\* 三角関数の連立方程式には、いろいろな解き方があることが多いです。これから、解説するような解き方で解いてもらってもいいですし、もう他の解き方を理解していてそっちで解くというのなら別にかまいません。

こういった解き方でもいいので、しっかりと自分のものにしておいてください。

$$\begin{cases} \sin y - \cos x = -1 \cdots \textcircled{1} \\ \sin x + \cos y = -\sqrt{3} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

この連立方程式で、とりあえず  $x, y$  が入っているとどちらかを消去して、文字をひとつに統一します。 $x$  と  $y$  のどちらを文字消去してもらってもいいですけど、とりあえず  $y$  を消去することにします。

文字消去の仕方は  $\textcircled{1}$  より  $\sin y = \cos x - 1 \cdots \textcircled{1}'$  と  $\textcircled{2}$  より  $\cos y = -\sin x - \sqrt{3} \cdots \textcircled{2}'$  とします。

$\textcircled{1}'$ ,  $\textcircled{2}'$  を三角関数の相互関係の式  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  に代入をすると  $y$  を消去して  $x$  のみの式にすることができます。とりあえずこの作業をしてみます。

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$(\cos x - 1)^2 + (-\sin x - \sqrt{3})^2 = 1 \quad \blacktriangleleft \textcircled{1}' \text{ と } \textcircled{2}' \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 + \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x + 3 = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 3 = 0$$

$$1 + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 3 = 0 \quad \blacktriangleleft \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ より}$$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$$

とりあえず、何も考えずにただ単に式変形をしてここまでたどりつきました。で、ここ

からどういうふうに解いていくかですが、 $\sin x$ と $\cos x$ に何の関係式もないのなら純粋に4元連立の方程式を解いていくしかありません。

でも、最初にいったように4元連立の方程式ってけっこうメンドウなんです。もちろん、これでも解けないことはないけど、三角関数ということを利用して解いていこうと思います。

で、もう一度 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$ を見ると、これって三角関数の合成が使えるタイプだよな。だから、とりあえず合成を使って解いていこうと思います。合成についてよく分からない、という人は<http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf>を見て勉強して下さい。

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -2$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$$

$$x = \frac{5}{3}\pi$$

これで、 $x$ の値を求めることができました。次に、 $y$ の値を求めていきたいとおもいます。①'にでも、代入して $y$ の値を求めていきたいと思います。

$$\sin y = \cos \frac{5}{3}\pi - 1$$

$$= \frac{1}{2} - 1$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

これで、 $(x, y) = \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi\right), \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$ が答えかな?と思ってしまいますが、これはまだ解の候補です。

連立方程式は①と②を満たして初めて解と言えます。今回は、まだ①を満たしているということしか言えていません。ですから、ここから②を満たしているかと確認をする必要があります。

三角関数の連立方程式の問題で、今回のように答えがふたつあるとき、多くの場合でど

ちらか一方のみが答えになるということが多いです。それでは、ここから、どちらが解になるかということを確認していきたいと思います。

(i)  $(x, y) = \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi\right)$  のとき

$$\sin x + \cos y = \sin \frac{5}{3}\pi + \cos \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

このとき、②は成立する。よって解となる。

(ii)  $(x, y) = \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$  のとき

$$\sin x + \cos y = \sin \frac{5}{3}\pi + \cos \frac{11}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

このとき、②は不成立。よって、不適

以上より、この連立方程式の解は  $(x, y) = \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi\right)$  ◀ **これが答え**

今回はこれで終了です。三角関数の連立方程式は、今回のものより少し複雑になるものもありますが、解き方は同じなので、この問題さえ解くことができればどういった問題でも解けるようになります。

少し変わった解き方をします。忘れやすいので、しっかりと暗記するまで繰り返すようにしておいてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会 8 か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を 70 にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）  
magdai@hmg-gen.com

河見賢司