三角関数No16.
「その他の必要な問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第１６回です。これまでの、１５回で三角関数に必要な問題は、ほとんどすべて解説しました。

今回、解説する問題は三角関数の知識としては、これまでの１５回で解説をしてきた内容さえ理解していたら解ける問題です。ただ、普段教えていて、理解できない人が多かったので解説をしておきたいと思います。

特に、２問めの「三角関数の解の個数の問題」は少し難しい問題かもしれません。でも頑張ってください。というのも、この問題を解くのに必要な考え方は、三角関数だけでなく他の単元でも必要になるからです。

今回解説するような内容さえ理解しておけば他の単元の問題でも解くことができます。入試に頻出という訳ではありませんが、高校数学を理解する上で重要な問題です。たった、２問しか解説しません。是非とも、しっかりと理解しておいてください。それでは、問題に進みたいと思います。

問題１

三角形 ABC において、$\angle \mathrm{A} = 60^\circ$ であるとする。

(1) $\sin B + \sin C$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin B \sin C$ のとりうる値の範囲を求めよ。

【(１）の解説】
まあ、この問題は三角関数の問題なんだけど、問題を見た瞬間に次のことを思いだして欲しいです。

数学の鉄則

数学の問題では変数 (文字) が多いほど計算がしんどい。そこで、変数 (文字) を減らせるときは、まず変数 (文字) を減らしてから考える

(注) この考えは数学の基礎の基礎です。もっと詳しく知りたいという人は http://www.hmg-gen.com/mojisyoukyo.pdf

この「**文字消去できるときは、何よりもまず文字消去**」という考えに従って問題を解いていくと、$A+B+C$ は当然三角形の内角の和であることを考えると $A+B+C=180°$ という関係式が成立します。

さらに、$A=60°$ なので、$B+C=120°$ となります。あとは、$C=120°-B$ より $\sin B+\sin C$ に $C=120°-B$ を代入すると $\sin B+\sin C=\sin B+\sin(120°-B)$ となり、変数が B と C の2つから、変数が B の1つになってくれたので考えやすくなります。

今回の問題は、「とりうる値の範囲を求めよ」と書いてありますが、これって要するに「最大値、最小値を求めよ」とほとんど同じです。

関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて解いていくというのが、基本です。でも、変数が2個以上のグラフは解くことができません。ですから、ほとんどの問題で「**変数が2個以上の最大値、最小値問題は変数を1個にできる**」ということを覚えておいてください。2変数のまま解いていく最大値、最小値問題はほとんど出題されません(2変数以上のまま解いていく問題もあります。特に、難しい大学ではよく出題されます。ですが、こういった難しい問題は、基本を理解できてからで十分です。とりあえず今のうちは「最大値、最小値問題のときは、1変数にできないかな？」と考えるようにしておいてください)

で、もう一つ重要なことを言い忘れていました(話がいったりきたりしてごめんなさい。でも、本当に言っておかないことが多いんです。本当なら、問題をみた瞬間に、これまで解説してきた内容をしっかりと頭の中に描けるようになっておいて欲しいです)

次に、話したいことですが、これも当たり前のことですが本当に重要です。それは、「**文字を消去するときは、必ず消去する文字の範囲について考える**」です。

どういうことかというと、今回は A, B, C は三角形の内角なので、どういったときでも $0° < A, B, C < 180°$ という条件を満たします。

今回は C を消去するので、C の範囲を考えることにします。C は、$0° < C < 180°$ という範囲を満たします。

$C=120°-B$ なので、$0° < C < 180°$ の C にも $C=120°-B$ という関係式が成立します。これを代入すると $0° < 120°-B < 180°$ です。この不等式を解くと $-60° < B < 120°$ となります。

これと、もともとの B の範囲 $0° < B < 180°$ と合わせると、$0° < B < 120°$ となります。

日本語で長々と説明したので、難しく感じたかもしれませんが、実際にやってみるとごく簡単ですよ。数学のできる人にとって当たり前の内容かもしれませんが、普段数学を教えていて意外なほどしっかりと理解できていない人が多いです。「**文字を消去したときは、消去した文字の範囲に注意する**」です。しっかりと理解しておいてください。(注) この「文字を消去したときは、範囲に注意」ですが、http://www.hmg-gen.com/h-mojisyoukyo.pdf に解説してあります。興味のある人は、見てください。

それでは、解答に進みたいと思いますが、問題をみた瞬間に気づいて欲しいことをもう一度書いておきます。

① **最大値、最小値問題だけで２変数だと難しいので、１変数にできそうだな**
② **文字を消去するけど、消去するときには範囲に注意！**
③ **最大値、最小値問題はグラフをかいて解いていく**

【(１) の解答】
三角形の内角の和は $180°$ なので、$60° + B + C = 180°$ よって、$B + C = 120°$

$C = 120° - B$

C は三角形の内角なので $0° < C < 180°$、また $120° - B = C$ より $-60° < B < 120°$

B は三角形の内角なので $0° < B < 180°$、よって $0° < B < 120°$ ◀ 文字を消去したときは範囲に注意！

$\sin B + \sin C$

$= \sin B + \sin(120° - B)$ ◀ $C = 120° - B$ を代入して、変数を B のみにした

$= \sin B + \sin 120° \cos B - \cos 120° \sin B$ ◀ $\sin(120° - B)$ を加法定理で展開した

$= \sin B + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \dfrac{1}{2}\sin B$

$= \dfrac{3}{2}\sin B + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B$

$= \sqrt{3}\sin(B + 30°)$ ◀ sin で合成をした！

ここで、$B + 30° = \beta$ とする。

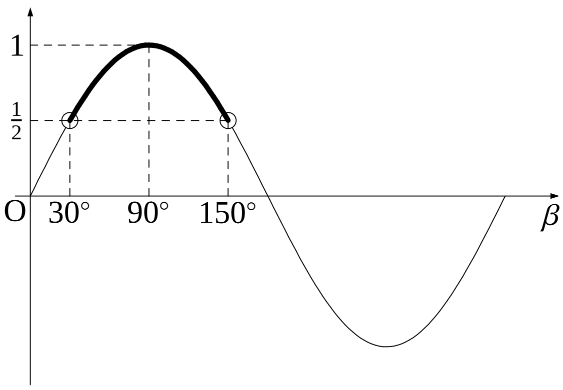
⇑最大値、最小値問題なのでグラフをかいて考える。$y = \sin(B + 30°)$ のグラフより、$y = \sin\beta$ のグラフの方がかきやすいので、$B + 30° = \beta$ と置き換えた。

文字を置き換えたときに範囲に注意するということも鉄則です。詳しく知りたいという人は、http://www.hmg-gen.com/okikae.pdf を見てください

$0° < B < 120°$

$30° < B + 30° < 150°$

$30° < \beta < 150°$ ◀ これで β の値の範囲が求まった



グラフより、$\frac{1}{2} < \sin\beta \leqq 1$

よって、$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B + \sin C \leqq \sqrt{3}$ ◀ これが答え

【(２)の解説】
これも(1)と同じように１変数に直してからといていきます。C を消去して整理すると $\sin B \sin C = \frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B$ になります。

この形を見て、「あっ、$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ の解法を使うな」と気づけるようにして欲しいです。

$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ の問題は、この三角関数のプリントの第１０回に詳しく解説しています。分からないという人は、http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf を見てください。

【(２)の解答】

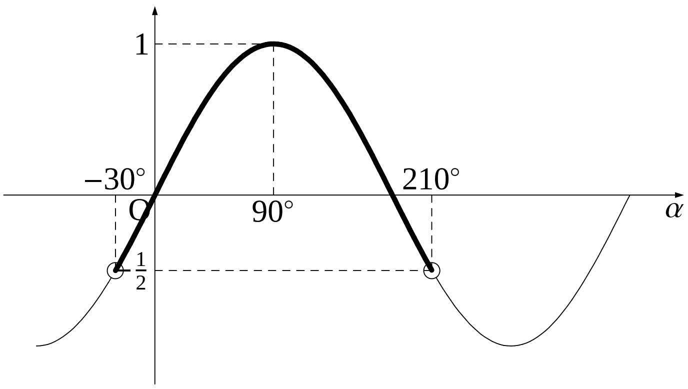
(1) と同じく、$C=120^\circ-B\ (0^\circ<B<120^\circ)$

$$
\begin{aligned}
&\sin B\sin C\\
&=\sin B\sin(120^\circ-B) \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ C=120^\circ-B\ \text{を代入した}}\\
&=\sin B(\sin 120^\circ\cos B-\cos 120^\circ\sin B) \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ \sin(120^\circ-B)\ \text{を加法定理を使って展開した}}\\
&=\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)\\
&=\frac{1}{2}\sin^2 B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta\ \text{の形になっている}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin 2B}{2} \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ \sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2},\ \sin B\cos B=\frac{\sin 2B}{2}\ \text{を代入した}}\\
&=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2B+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B\\
&=\frac{1}{4}(\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B)+\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{4}\cdot 2\sin(2B-30^\circ)+\frac{1}{4} \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ \sin 2B-\cos 2B\ \text{を合成した}}\\
&=\frac{1}{2}(2B-30^\circ)+\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ここで、$2B-30^\circ=\alpha$ とする。

$$
\begin{aligned}
&0^\circ<B<120^\circ\\
&0^\circ<2B<240^\circ\\
&-30^\circ<2B-30^\circ<210^\circ\\
&-30^\circ<\alpha<210^\circ
\end{aligned}
$$

⇑ 文字を置き換えたときは範囲に注意



グラフより、$-\frac{1}{2} < \sin(2B - 30°) \leqq 1$

$$-\frac{1}{2} < \sin(2B - 30°) \leqq 1$$
$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\sin(2B - 30°) \leqq \frac{1}{2}$$ ◀ すべての辺に $\frac{1}{2}$ をかけた
$$0 < \frac{1}{2}\sin(2B - 30°) + \frac{1}{4} \leqq \frac{3}{4}$$ ◀ すべての辺に $\frac{1}{4}$ を加えた

$\therefore 0 < \sin B \sin C \leqq \frac{3}{4}$ ◀ これが答え！

それでは、次に「三角関数の解の個数に関する問題」です。少し難しいかもしれませんが、頑張って解いてください。

問題 2

a を定数とする θ に関する方程式 $\cos^2\theta - \sin\theta + a = 0$ について、次の問いに答えよ
ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) この方程式が解をもつための a の値の範囲を求めよ

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ

(3) この方程式が 4 個の実数解をもつとき、その 4 個の実数解の和を求めよ

【（1）の解説】
まず、この問題は「定数分離」という考え方を使って解いていきます。その前に、$\cos^2\theta - \sin\theta + a = 0$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混じった式で考えにくいので、とりあえず $\sin\theta$ に統一してから考えていきます。

$$\cos^2\theta - \sin\theta + a = 0$$
$$(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta + a = 0$$ ◀ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より
$$1 - \sin^2\theta - \sin\theta + a = 0$$

これで、とりあえず $\sin\theta$ のみの式にできました。ここからですが、こういった問題は $a = \cdots$ の形に式変形をします。ちなみにこういった作業のことを「**定数分離**」といって必須の考え方です。しっかりと覚えておいてください。

それでは、$1-\sin^2\theta-\sin\theta+a=0$ を定数分離して、$a=\cdots$ の形にしたいと思います。

$1-\sin^2\theta-\sin\theta+a=0$

$a=\sin^2\theta+\sin\theta-1$ ◀ 定数分離をした

で、ここからなんですが $y=a$ と $y=\sin^2\theta+\sin\theta-1$ のグラフの交点の個数を求めていけばいいわけなのですが、$y=\sin^2\theta+\sin\theta-1$ のグラフなんてかけないよね (数学 III ではかくことができますが ⋯)。

ここからどうするかというと文字の置き換えです。$y=\sin^2\theta+\sin\theta-1$ は、$\sin\theta$ のみの式なので $\sin\theta=X$ と置き換えます。文字を置き換えたときは、範囲に注意しないといけないですが、今回は $0\leqq\theta<2\pi$ なので、$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ より $-1\leqq X\leqq1$ となります。

以上のことより、(1) は「$a=X^2+X-1$ が $-1\leqq X\leqq1$ の値の範囲に解をもつような a の値の範囲を求めよ」と言い換えることができます。

これは、「$y=X^2+X-1$ と $y=a$ の 2 つのグラフが $-1\leqq X\leqq1$ に交点をもてばよい」と言い換えることができます。以上のことを踏まえ、解答に進みたいと思います。

【(1)の解答】

$\cos^2\theta-\sin\theta+a=0\cdots(*)$

$(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+a=0$ ◀ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ より

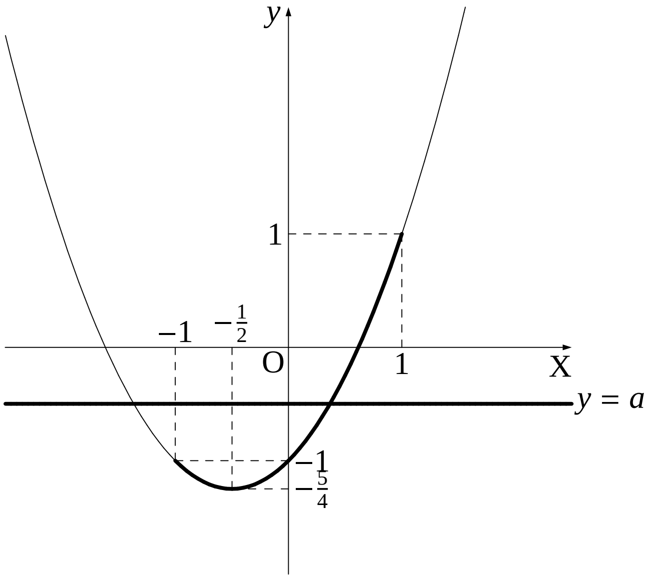
$1-\sin^2\theta-\sin\theta+a=0$

$a=\sin^2\theta+\sin\theta-1$

ここで、$X=\sin\theta$ とする。$-1\leqq X\leqq1$ ◀ 文字を置き換えたときは範囲に注意

$a=X^2+X-1$

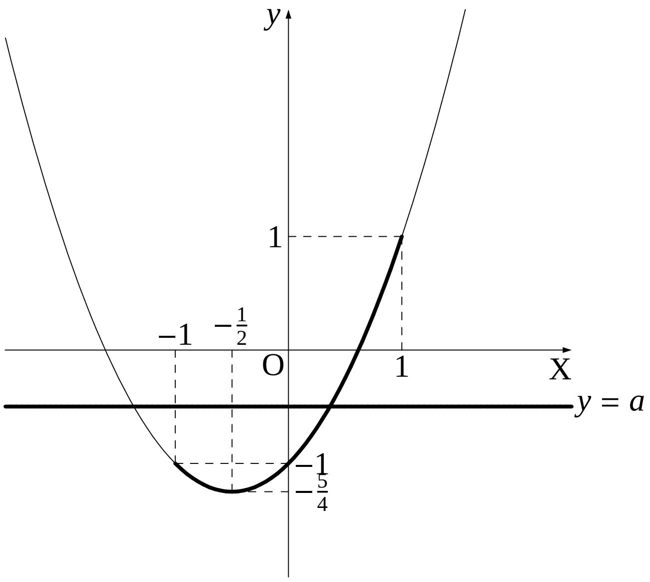
以上より、$(*)$ が解をもつためには、$y=X^2+X-1$ と $y=a$ が $-1\leqq X\leqq1$ の値の範囲で交点をもてばよい。



上図より、$y = X^2 + X - 1$ と $y = a$ が $-1 \leqq X \leqq 1$ の範囲で交点をもつには、
$-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$ であればよい。

【(2)の解説】
(1)は比較的簡単だったと思いますが、(2)は難しいと感じる人もいるかもしれません。まずは、よくある誤答例をあげておきます。

【有名な誤答例】



上図より、

(i) $a > 1$ のとき、解 0 個

(ii) $-1 < a < 1$ のとき、解 1 個

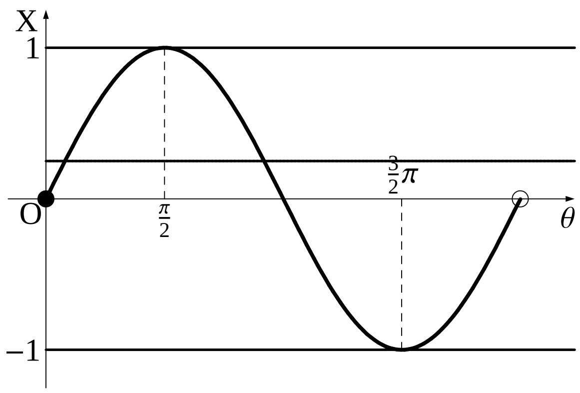
(iii) $-\dfrac{5}{4} < a \leqq -1$ のとき、解 2 個

(iv) $a = -\dfrac{5}{4}$ のとき、解 1 個

(v) $a < -\dfrac{5}{4}$ のとき、解 0 個

上記の答案のどこが間違っているか分かる？これが X の解の個数だったら、この答案で正解です。ただ、今回の式は θ に関する方程式です。ですから、解の個数も当然 X の解の個数でなくて、θ の解の個数を求めないといけません。

X と θ には、$X = \sin\theta$ という関係式が成立しています。

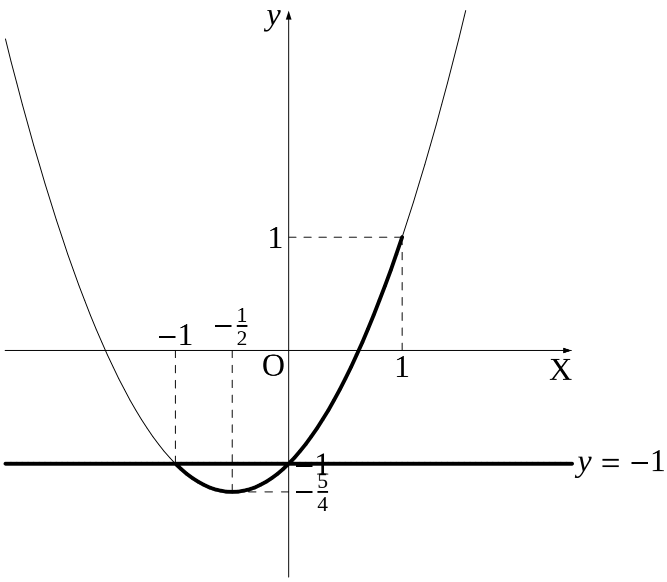


今回 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ という範囲です。これを頭にいれて図示すると上図のようになります。

$X = 1$ と $X = -1$ のときは、$y = X$ と $y = \sin\theta$ のグラフの交点は 1 個。それ以外の $-1 < X < 1$ のときは、グラフの交点は 2 個。

グラフの交点は解と一致するので、つまり $X = \pm 1$ のときは、ひとつの X につき、それ

に対応する θ の個数は 1 個、$-1 < X < 1$ のとき、ひとつの X につき、それに対応する θ の個数は 2 個です。



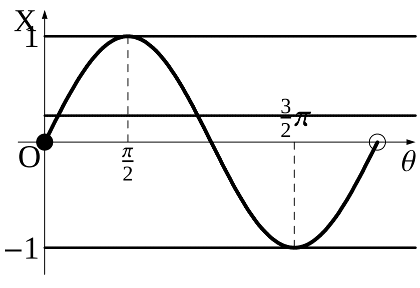
例えば、上記のように $a = -1$ のとき、$y = X^2 + X - 1$ と $y = a(= -1)$ の交点は $X = -1$ と $X = 0$ のときです。

ここから θ の解の個数を求めていきますが、$X = -1$ のとき θ の解の個数は 1 個です。次に $X = 0$ のときは、$-1 < X < 1$ のときなので θ の解の個数は 2 個です。

ですから、この場合 θ の解の個数はあわせて 3 個となります。

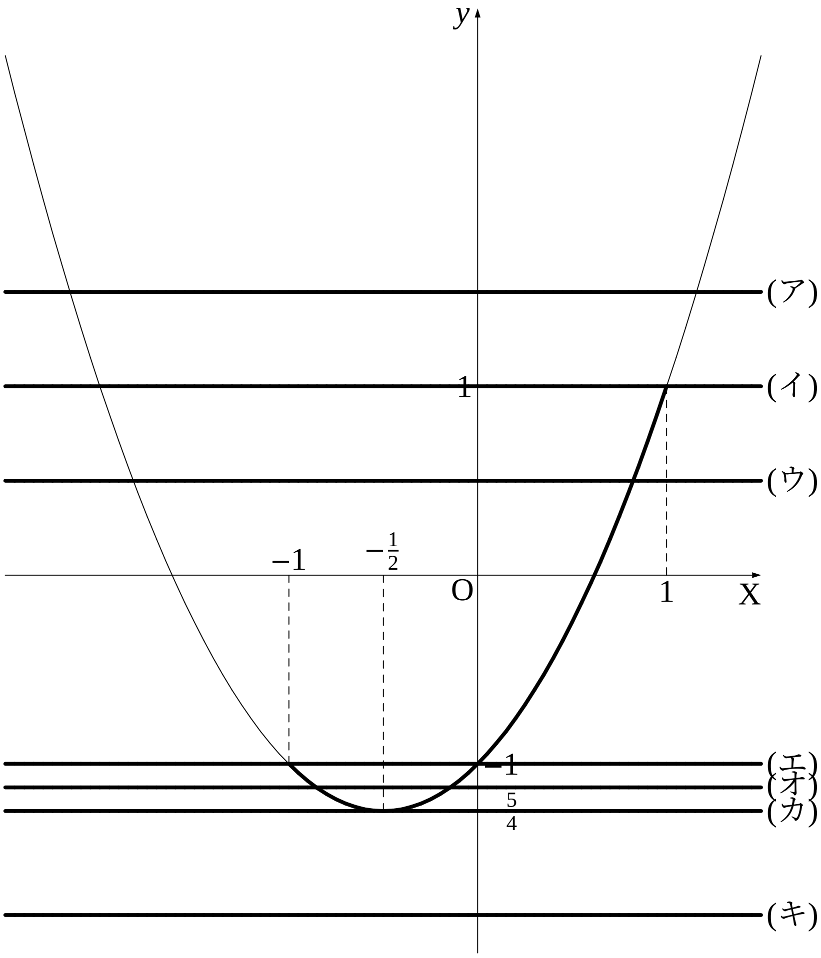
今回の問題は、「X の解の個数でなくて、θ の解の個数が問われています」そのことに注意して解いていってください。それでは、解答に進みます。

【（2）の解答】
$X = \sin\theta$ より



$X = \pm 1$ のとき、それを満たす θ は 1 つ
$-1 < X < 1$ のとき、それを満たす θ は 2 つ

以上のことを踏まえ、θ の解の個数を調べると



グラフより、

(ア) $a > 1$ のとき、X の解の個数 0 個より、θ の解の個数 0 個

(イ) $a = 1$ のとき、X は $X = 1$ ◀ θ は 1 個 という解をもつので、θ の解の個数 1 個

(ウ) $-1 < a < 1$ のとき、X は $0 < X < 1$ ◀ θ は 2 個 で解を 1 つもつので、θ の解の個数 2 個

(エ) $a = -1$ のとき、$X = -1$ ◀ θ は 1 個 と $X = 0$ ◀ θ は 2 個 の解をもつので、θ の解の個数 3 個

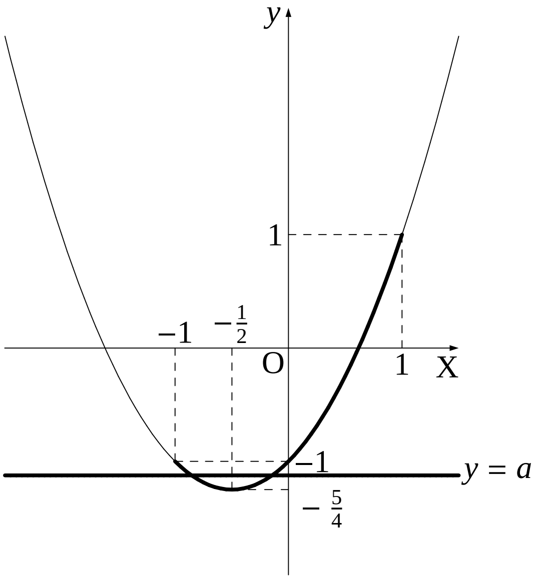
(オ) $-\dfrac{5}{4} < a < -1$ のとき、X は $-1 < X < 0$ ◀ θ は 2 個 で解を 2 つもつので、θ の解の個数は 4 個

(カ) $a = -\dfrac{5}{4}$ のとき、X は $X = -\dfrac{1}{2}$ ◀ θ は 1 個 という解をもつので、θ の解の個数は 2 個

(キ) $a < -\dfrac{5}{4}$ のとき、X の解の個数 0 個より、θ の解の個数 0 個

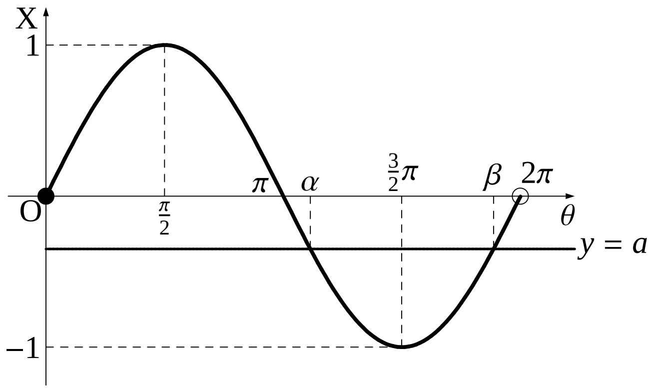
【(3) の解説】一見難しそうな問題ですが、三角関数の対称性を考えれば簡単に解くことができます。

「4 個の実数解の和」を求めようという問題ですが、ひとつずつの解は a の値が変わることによって変わってくるので求めようがありません。そこで、どうしようかな？と考えるのですが、とりあえずもう一度、グラフを見ることにします。



(2) より、4 個の実数解をもつのは上記のようなときで $-\dfrac{5}{4} < a < -1$ のときです。その場合、グラフより X の解は $-1 < X < -\dfrac{1}{2}$ と $-\dfrac{1}{2} < X < 0$ でそれぞれ 1 個ずつ存在します。

でも、求めたいのは θ の解です。$X = \sin\theta$ を考えると、



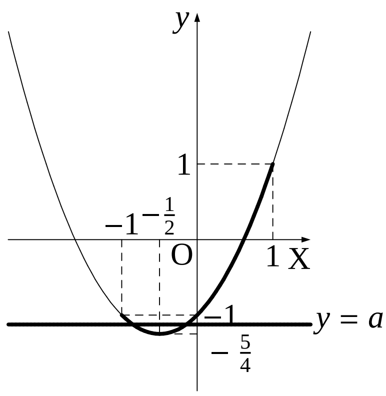
三角関数には対称性が多くあります。$X = \sin\theta$ のグラフは、$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ に線対称です。θ 軸上における α から $\dfrac{3}{2}\pi$ までの距離と $\dfrac{3}{2}\pi$ から β までの距離は等しくなります。

直線上の距離は純粋に大きい方から、小さい方を引けばよいので α から $\dfrac{3}{2}\pi$ までの距離は $\dfrac{3}{2}\pi - \alpha$ となり、$\dfrac{3}{2}\pi$ から β までの距離は $\beta - \dfrac{3}{2}\pi$ となります。２つの距離が等しいことから、次の等式が成り立ちます。

$$\frac{3}{2}\pi - \alpha = \beta - \frac{3}{2}\pi$$
$$\alpha + \beta = 3\pi$$

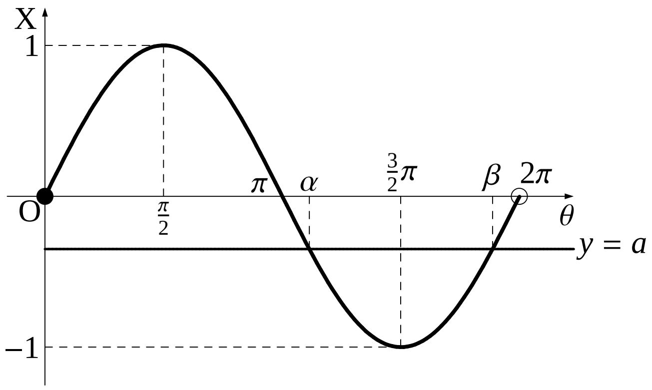
それでは、解答にすすみます。

【（３）の解答】
(2) より、４個の実数解をもつのは $-\dfrac{5}{4} < a < -1$ のとき



上図より、$-1 < X < -\dfrac{1}{2}$ と $-\dfrac{1}{2} < X < 0$ で交点をもつ。

$-1 < X < -\dfrac{1}{2}$ のとき、θ の実数解を α, β とすると、



グラフの対称性より、
$\dfrac{3}{2}\pi - \alpha = \beta - \dfrac{3}{2}\pi$
$\alpha + \beta = 3\pi$

同様に、$-\dfrac{1}{2} < X < 1$ のとき、θ の実数解を γ, δ とすると、

$\gamma + \delta = 3\pi$

以上より、４つの実数解の和は $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 6\pi$ となる。

これで、今回の解説プリントは終わりです。今回の問題は少し難しかったと思います。重要なので、しっかりと理解しておいてください。

この第１６回をもって三角関数は終了です。お疲れ様です。このプリント１６回分でとありあず覚えないといけない基本的な事柄はすべて網羅されています。

三角関数はこのくらい理解できていたら十分です。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com