三角関数No3.「sin, cos, tanの相互関係」

こんにちは、河見賢司です。今回は三角関数の第三回「sin, cos, tan の相互関係」です。

タイトルは、「sin, cos, tan の相互関係」としましたがより詳しく言うと「sin, cos, tan いずれかの値が分かっているとき、その他の sin, cos, tan の値を求めよ」という問題です。

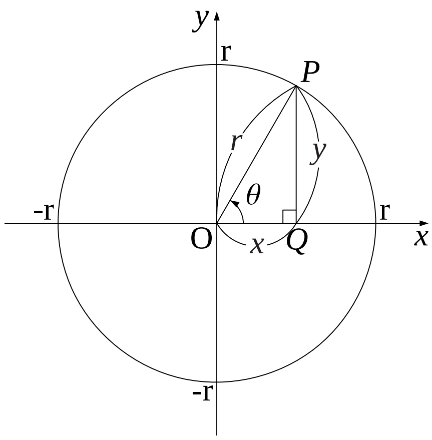
このタイプは入試でも頻出で、特に私立大学の小問で本当によく出題されています。簡単な問題ではありますが、しっかりと理解しておいてください。

この「sin, cos, tan いずれかの値が分かっているとき、その他の sin, cos, tan の値を求めよ」という問題は 2 通りの解き方があります。まず一つ目は、三角関数の相互関係の式を使って求める解法。そして二つ目は、図を使って求める解法です。ほとんどの教科書や問題集を見ていると、三角関数の相互関係の式を使って求める解法ですが、実は、二つ目の解き方の図を使って解く解法のほうがだいぶ計算が楽です。

とりあえず、相互関係の式を使って求める解法も理解してもらわないといけませんが、問題を解くときは図を使って解いてもらったほうがよいと思います。

問題に進む前に、三角関数の定義を説明しておきます。こんなこと分かっているよという人は、いきなり問題に進んでもらっていいです。

三角関数の定義



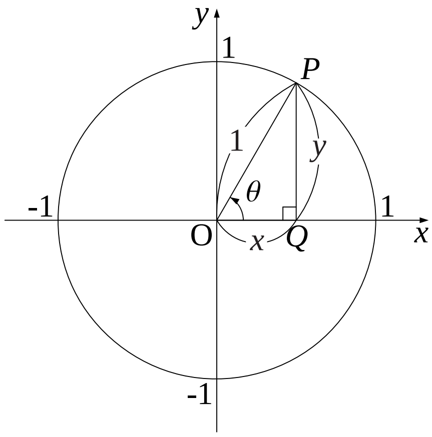
$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

円を単位円にしてみます。単位円とは半径が 1 の円のことです。

三角関数の定義 (単位円)



$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

次に sin, cos . tan が第何象限で正負いずかの値をとるか覚えてください。

$\sin\theta = y$ ということは sin の値は単位円上における y の値と等しいということです。
y の値が正となるのは第一象限と第二象限で、負となるのは第三象限と第四象限です。

sin の正負は y の正負と一致するので、sin は第一象限、第二象限で正となり、第三象限、第四象限で負になります。

次に $\cos\theta$ です。
$\cos\theta$ も sin のときと同じように考えて、$\cos\theta = x$ より x が正となる第一象限と第四象限で cos の値は正となり、第二象限と第三象限で負となります。

最後に $\tan\theta$ です。
$\tan\theta$ の正負の考え方は傾きを考える方法と $\tan\theta = \frac{y}{x}$ で考える考え方があります。傾きで考える方法も重要な考え方ではありますが、ここでは $\tan\theta = \frac{y}{x}$ で考えていきます。

$\frac{y}{x}$ の正負は xy の正負と一致するよね。つまり $\tan\theta$ の正負は xy の正負と一致します。

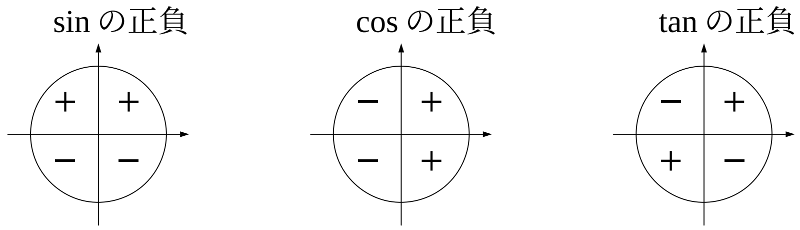
２数を掛け合わせた時両方とも同符号 (プラスとプラスまたはマイナスとマイナス) だったら正となり、異符号 (プラスとマイナス) ならマイナスになります。

第一象限では、x, y ともに正なので xy の値は正、つまり $\tan\theta$ の値も正になります。第二象限では $x < 0, y > 0$ と x, y の値が異符号なので $\tan\theta$ の値は負、第三象限では $x < 0, y < 0$ と x, y の値が同符号なので $\tan\theta$ の値は正、第四象限では $x > 0, y < 0$ と x, y は異符号なの

で $\tan\theta$ の値は負になります。

一応こう考えれば $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ の正負が分かるのですが、いちいち考えていたら時間がもったいないので、次の図を覚えてください。

三角関数の正負



以上のことを踏まえて、問題に進みます。

問題 1

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

まずは解法 1、三角関数の相互関係を使って求めていきます。三角形の相互関係とは以下の通りです。

三角関数の相互関係

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

② $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③ $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

③ の式は、①, ② の式から sin を消去したものです。簡単ですが、一応導いておきますね。

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より、$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

この式を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$\Leftrightarrow\ (\tan\theta\cos\theta)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow\ \tan^2\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow\ (1 + \tan^2\theta)\cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow\ 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ◀ 両辺を $\tan^2\theta$ で割って、公式が導けた！

では、この関係式を使って問題 1 を解いていきます。問題との間が少しできたので、もう一度問題を書いておきます。

問題 1

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

【解答】

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{4}{9} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$$
$$\therefore\ \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(注) 以下 $\tan\theta$ は $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式でも求められますが、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値が分かっているので $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ のほうが計算が楽になります。

(i) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$ ◀ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ をそれぞれ代入した

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$ ◀ 分母分子に 3 をかけて $\tan\theta$ の値が求まった

(ii) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき

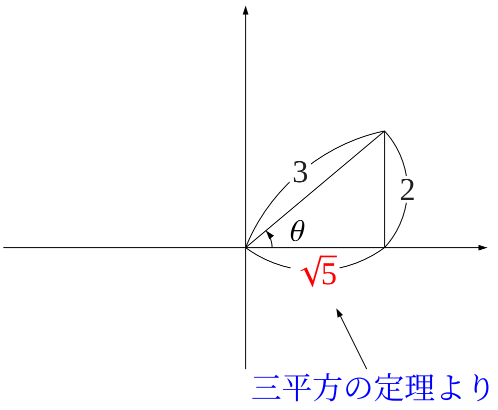
$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$$ ◀ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ をそれぞれ代入した

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$$ ◀ 分母分子に 3 をかけて $\tan\theta$ の値が求まった

では、次に解法 2、図を使って求めていきたいと思います。三角関数の定理で $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ を満たす三角形を図示して、求めていきます。最初にも話しましたが、こちらの方が計算が楽です。

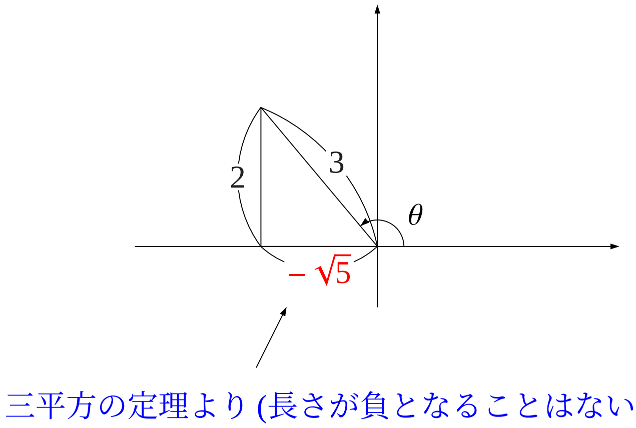
【解答】
$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ を図示すると次の 2 通り

(i) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき



図より $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(i) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のとき



図より $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

　では、もう一問解いてもらいます。数字のときは三角関数の相互関係で求めても、図形で求めても大して計算量は変わりませんが、文字式になったとき図形で求めたほうが計算量がかなり少なくなると思います。

問題２

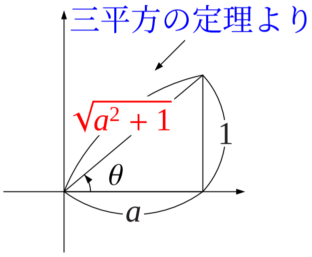
$0 \leqq \theta < \pi,\ a > 0$ とする。$\tan\theta = \dfrac{1}{a}$ のとき $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

これは図形で求める解き方で解いていきます。

【解答】

$\tan\theta = \dfrac{1}{a}$ で $a > 0$ より、$\tan\theta > 0$ となる。$\tan\theta > 0$ となるのは第一象限のときと、第三象限のときが考えられるが、$0 \leqq \theta < \pi$ より第三象限のときは不適なので、第一象限のときのみとなる。

このことを考え、$\tan\theta = \dfrac{1}{a}$ を図示すると次にようになる。



図より $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

今日の解説はここで終了です。次回は三角関数の対称式に関する問題を解説していく予定です。今日の内容は、本当に基本的な内容です。もし理解できていないところや、忘れていたところがあったらしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com