
三角関数No5.
「置き換えの必要な三角関数の方程式」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第５回。「置き換えの必要な三角関数の方程式」です。

三角関数の方程式や不等式の解き方は単位円を使った方法と、グラフを使った方法の２通りがあります。僕の授業では、三角関数のグラフを使って解くことにします。

もちろん単位円で理解しているのなら、単位円で解いてもらってもいいですが、三角関数以外の単元は、方程式や不等式を解くときはグラフを使って解くと思います。

三角関数だけ単位円で考えるのではなく、他の単元と同じようにグラフで解いていった方がラクだと思います。何がなんでも単位円という人以外はグラフを使って解くようにしてもらったらいいと思います。

なお、三角形の方程式や不等式のグラフは、三角関数のグラフの対称性を利用して解いていきます。三角関数の対称性のことが理解できていないという人は、こちらのプリントでまず勉強しておいてください。５．５ＭＢと重いので注意してください。
「グラフを使って解く三角関数の方程式」
http://www.hmg-gen.com/sankakuhouteisiki.pdf

では、今回の問題に進みます。

問題 1

$0 \leqq x < \pi$ のとき、方程式 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ を解け

【解説】

まず、この問題をグラフを使って解いていきます。$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ っていうのは、要するに $y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ と $y = -\frac{1}{2}$ のグラフの交点の θ 座標のことなんだから、この２つのグラフをかいて $\cdots$ って考えると思います。

学校の授業でこういった三角関数のグラフを授業で聞いた人も多いと思うけど、$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left\{2\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)\right\}$ なんだから、$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフは $y = \sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{12}$ だけ平行移動させたっていうことを利用してグラフをかいたと思います。

これで一応、$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフはかけるんだけど、メンドウ臭い上に $-\frac{\pi}{12}$ なんていう微妙な大きさの平行移動だからグラフをかきづらいよね。できたら、この方法以外で解きたい $\cdots$

そこで次のことを覚えておいてください。

三角関数での考え方

三角関数の問題で $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ や $\cos(\theta + \pi)$ のように $\sin\bigcirc$, $\cos\bigcirc$, $\tan\bigcirc$ の $\bigcirc$ の部分がきたなければ、とりあえず $\bigcirc = t$ とでも置き換えて解いていく

$\bigcirc = t$ と置き換えたけど、この部分は別に t でなくても自分の好きな文字で別にいいです。

それから今回は三角関数の話をしているので、三角関数の中身が汚いときは置き換えると話しましたが、これは三角関数に限りません。絶対値の中身、ルートの中身、問題問題によってもちろん置き換えたりそうでなかったりすることはありますが、こういった

考えにくいものの中身が複雑な式ならこのように中身を (中身) $= t$ と置き換えることが多いです。これは重要なテクニックの一つです。

問題 1 は $y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかかないとダメだったんだけど、$2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ と置き換えたら、$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ は $y = \sin t$ ってなるから、これなら簡単にグラフをかくことができるようね。

あたり前のことなんだけど、<u>文字を置き換えた時は、置き換えた文字の範囲に注意するということを忘れないようにしてください。</u>

今回は $t = 2\theta + \frac{\pi}{6}$ って置き換えたんだけど、t は θ で表せて θ には $0 \leqq \theta < \pi$ という値の範囲があるのだから、当然 t にも値の範囲が付いてくるよね。

このあたりのことが分からない人は、次のプリントを見てください。
「文字を置き換えた時の注意点」
http://www.hmg-gen.com/okikae.pdf

t の値の範囲は $0 \leqq \theta < \pi$ という式を少しずつ変形して t の値の範囲を求めていきます。意外に求め方を知らない人が多いので、しっかりと求め方を覚えておいてください。

t の値の範囲の求め方

$0 \leqq \theta < \pi$

$0 \leqq 2\theta < 2\pi$

⇑ まず全部の辺に 2 をかけた。真ん中の部分が $2\theta + \frac{\pi}{6}$ になるように少しずつ式変形

$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$

⇑ 全部の辺に $\frac{\pi}{6}$ を足した。真ん中の部分が t の形になった！

$\frac{\pi}{6} \leqq t < \frac{13}{6}\pi$ ◀ t の値の範囲が求まった！

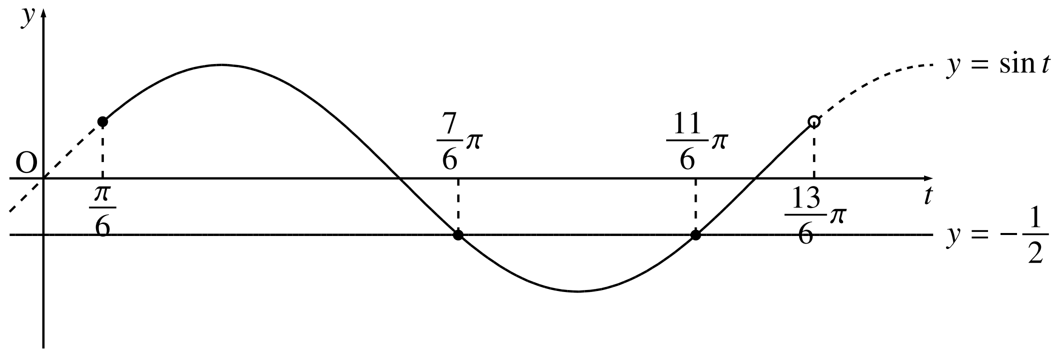
では解答に進みます。問題から、少し間があいたのでもう一度問題をかいておきます。

問題 1

$0 \leqq x < \pi$ のとき、方程式 $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ を解け

【解答】

$2\theta + \dfrac{\pi}{6} = t$ とする。$0 \leqq x < \pi$ より $\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{13}{6}\pi$



グラフより、交点は $t = \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$

(i) $t = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$
$$2\theta = \pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $t = \dfrac{11}{6}\pi$ のとき

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$
$$2\theta = \frac{5}{3}\pi$$
$$\theta = \frac{5}{6}\pi$$

以上より、方程式の解は $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi}$

では、次に不等式を解きます。不等式も方程式と同じようにグラフをかいて考えていきます。

問題 2

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け

【解答】

$2\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とする。

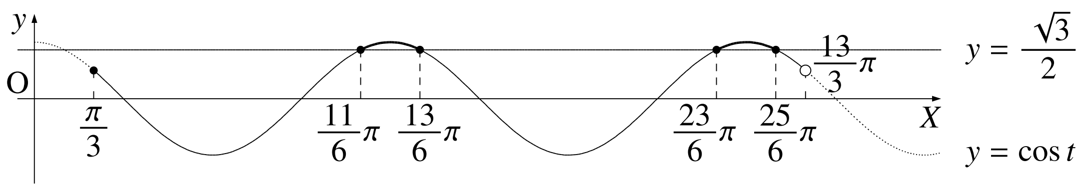
$0 \leqq \theta < 2\pi$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ ◀ 全ての辺に 2 をかけた

$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$ ◀ 全ての辺に $\frac{\pi}{3}$ を加えた

$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$ ◀ t の値の範囲が求まった！

＊後は $\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{13}{3}\pi$ の範囲で $y=\cos t$ のグラフと $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のグラフをかいて、ふたつのグラフの上下関係を調べるだけです。



＊グラフの $t=\frac{23}{6}\pi$ と $t=\frac{25}{6}\pi$ は周期が 2π であること使い

$\frac{11}{6}\pi+2\pi=\frac{25}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi+2\pi=\frac{25}{6}\pi$ 求めた。

(i) $\frac{11}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{13}{6}\pi$ のとき

$\frac{11}{6}\pi \leqq 2\theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{13}{6}\pi$ ◀ $t=2\theta+\frac{\pi}{3}$ を代入した

$\frac{3}{2}\pi \leqq 2\theta \leqq \frac{11}{6}\pi$ ◀ 全ての辺を $-\frac{\pi}{3}$ をした

$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{12}\pi$ ◀ 全ての辺を 2 で割り θ の値の範囲が求まった！

(ii) $\frac{23}{6}\pi \leqq t \leqq \frac{25}{6}\pi$ のとき

$\frac{23}{6}\pi \leqq 2\theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{25}{6}\pi$ ◀ $t=2\theta+\frac{\pi}{3}$ を代入した

$\frac{7}{2}\pi \leqq 2\theta \leqq \frac{23}{6}\pi$ ◀ 全ての辺を $-\frac{\pi}{3}$ をした

$\frac{7}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{23}{12}\pi$ ◀ 全ての辺を 2 で割り θ の値の範囲が求まった！

以上より、求める範囲は $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{12}\pi,\ \ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{23}{12}\pi$

今回のプリントはこれでおしまいです。問題２はかなりややこしい問題に思えた人もいるかと思いますが、順々にやっていけばやることは一緒なので本当にワンパターンで解けてしまいます。

今回話したような方程式や不等式はあなたの使っている教科書や問題集にも載っていると思うので、今回話した内容を参考にしながら問題演習を繰り返しておくようにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録

しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司