三角関数No7.
「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART2.」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第７回。
「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART2.」です。

三角関数には、文字の置き換えの必要な最大値・最小値問題がよく出題されます。

前回でもお話ししましたが、実際の大学受験で出題される文字の置き換えは次の５パターンくらいです。

① $\sin\theta = X$ とする。　② $\cos\theta = X$ とする。　③ $\sin\theta + \cos\theta = X$ とする。
④ $\sin\theta - \cos\theta = X$ とする。　⑤ $\sin\theta\cos\theta = X$ とする。

前回のプリント (http://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf) で①と②を解説しました。今回は③のパターンの置き換えを解説していきます。

このタイプの問題は、問題を解くにあたり三角関数の合成という知識が必要になるので、まずは三角関数の合成を覚えてください。

三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

上記の三角関数の合成が成立していることは、三角関数の加法定理で簡単に確認することができます。簡単だとは思いますが一応証明しておきますね。

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$ の証明

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$ を示す。

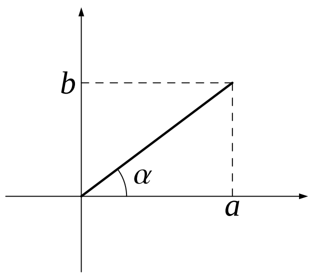
$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \quad \blacktriangleleft \text{加法定理で展開した}\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\theta\cos\alpha + \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\theta\sin\alpha
\end{aligned}
$$

ここで $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ をそれぞれ代入して

$$
\begin{aligned}
&= \cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\,\sin\theta + \cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}\,\cos\theta\\
&= a\sin\theta + b\cos\theta = (\text{右辺}) \ //
\end{aligned}
$$

α なんですけど、$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ からいちいち求めてもらってもいいんですが、次のように図から求めるほうが簡単です。

α の求め方

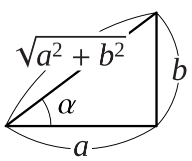


ステップ1　$\sin\theta$ の係数 a を x 軸上にかく

ステップ2　$\cos\theta$ の係数 b を y 軸上にかく

ステップ3　(a, b) から原点に線を引き、その線分が x 軸と正の向きとなす角が α となる！

上記の α は確かに $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ が成立しているなっていうのはすぐに分かる？これはすぐに分かって欲しいいんだけど、三角関数の定義を考えれば明らかだよね。



左図より、三角定数の定義を使い

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となる。

三角関数の合成について α は x 軸の正方向（時計まわり）と定義しているので反対の回転（反時計まわり）の場合、α はマイナスになります。

あと α は $30°,\ 45°$ のように具体的な角度が求まるときとそうでないものがあります。具体的に求められないときはそのまま α を使って解いていきます。

三角関数の合成ですが、たまに「$a\sin 2\theta + b\cos 2\theta$ でもできるんですか？」と質問してくる人がいますが、合成は $a\sin\bigcirc + b\cos\bigcirc$ の $\bigcirc$ の部分が同じであったらどんなものでも合成できます。

三角関数の合成は、sin でなく cos で合成することができます。cos で合成した方が sin で合成するより簡単な場合もありますが、それほど変わらないので私はいつも sin で合成するようにしています。

ただ、センター試験などの問題で誘導されていてどうしても cos で合成をしないといけないときは、その場で加法定理から導くようにしています。

では、今日の本題に進みます。まずは、次の問題を解いていってください。

問題

関数 $f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 2$ について、次の問いに答えよ。
ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて、$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(1)
【解説】
$f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 2$ の変数は $\sin\theta\cos\theta$ と $\sin\theta + \cos\theta$ の 2 種類であり $\sin\theta + \cos\theta = t$ っておくんだから $\sin\theta\cos\theta$ をなんとか t を用いて表すことができたら $f(\theta)$ は t のみを使って表せるよね。

$\sin\theta + \cos\theta = t$ と $\sin\theta + \cos\theta$ の値が分かっているときは、両辺を 2 乗したら $\sin\theta\cos\theta$ の値が求まるってことは覚えてる？

このあたりが分からない人は、「三角関数の対称式の問題」http://www.hmg-gen.com/sankaku4.pdf を見てください。それでは解答に進みます。

【解答】

$\sin\theta + \cos\theta = t$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = t^2$ ◀ 両辺を２乗した

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = t^2$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = t^2$ ◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ ◀ $\sin\theta\cos\theta$ を t で表せた

$f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 2$

$= 2\dfrac{t^2 - 1}{2} + t + 2$ ◀ $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, $\sin\theta + \cos\theta = t$ をそれぞれ代入した

$= t^2 - 1 + t + 2$

$= t^2 + t + 1$ ◀ これが答え！

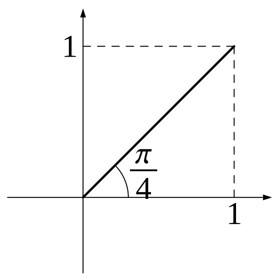
(2)

【解説】

t のとりうる値の範囲を求めよ、とは要するに t の最大値・最小値を求めなさいよということです。関数の最大値・最小値問題の基本はグラフをかいて解いていきます。今回 $\sin\theta + \cos\theta$ のグラフは先ほど説明をした三角関数の合成をしたらグラフをかくことができるようになるので、まずは合成をして、それからグラフを書いていきます。

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のように sin と cos が１次式同士の和の形に表されている時は三角関数の合成を使うのでは？と考えるようにしてください。

【解答】



$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ ◀ 合成をした

$t = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

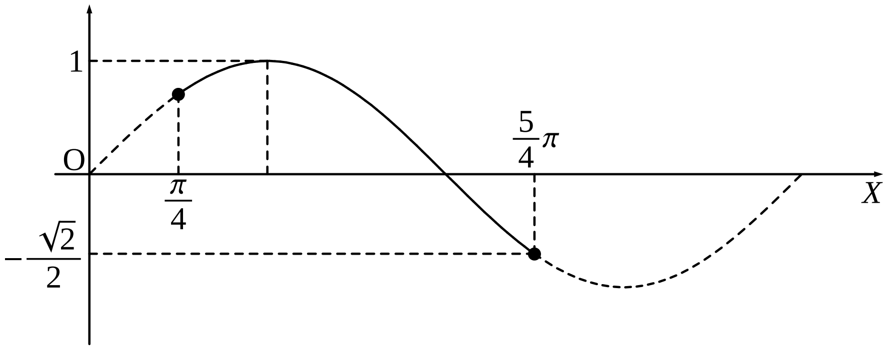
ここで $\theta + \frac{\pi}{4}$ とする。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \pi + \frac{\pi}{4}$ ◀ 文字を置き換えた時は範囲に注意する。

$\frac{\pi}{4} \leqq X \leqq \frac{5}{4}\pi$

$\sin X \ (\frac{\pi}{4} \leqq X \leqq \frac{5}{4}\pi)$ の最大値・最小値を求める。



グラフより

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin X \leqq 1$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leqq 1$ ◀ $X = \theta + \frac{\pi}{4}$ を代入

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leqq \sqrt{2}$ ◀ 全ての辺に $\sqrt{2}$ をかけた

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ ◀ $t = \sqrt{2}(\theta + \frac{\pi}{4})$ を代入し t の値の範囲が求まった

(3)

【解説】

この問題は (1) (2) を利用すると単なる 2 次関数の問題です。

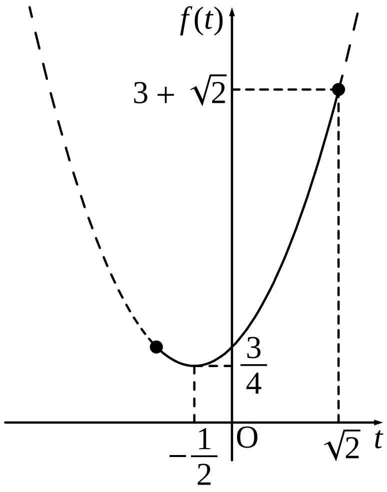
【解答】

$f(\theta)$ の最大値と最小値は

$f(\theta) = t^2 + t + 1$ の $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の最大値と最小値と一致する。 ◀ (1) (2) より

$f(t) = t^2 + t + 1$

$\quad = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ ◀ 平方完成をした！



グラフより、$t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$、$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $3+\sqrt{2}$ をとる。

今回解いてもらった問題は、親切にも $\sin\theta+\cos\theta=t$ としろと誘導がついています。でも、実際の大学受験の問題はこういった誘導がつかないことも多いです。

三角関数の問題で与式が $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ のみの式だったら $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおいていくことを覚えておいてください。

また、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式の基本対称式は $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ なので、与式が sin と cos の対称式のときは、$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと与式は t のみで表すことができます。ただ、与式が sin と cos の対称式だからといって必ず $\sin\theta+\cos\theta$ とおくとは限りません。これは今後また話しますが $\sin\theta\cos\theta=t$ とおいた方が楽な場合があります。

とにかく、与式が $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ で表されているときは、$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおいてといていくということを覚えておいてください。

今回のプリントはこれで終了です。今回のところは受験でも頻出です。三角関数の問題では、最初にどういうふうに置き換えるかが重要になりますが、与式が $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ のみで表されているときは、$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおいて解いていくということをしっかりと覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com