

三角関数 No8.

「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題 PART3.」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第8回。

「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題 PART3.」です。

三角関数には、文字の置き換えの必要な最大値・最小値問題がよく出題されます。

実際の大学受験で出題される文字の置き換えは次の5パターンくらいです。

- ① $\sin \theta = X$ とする。 ② $\cos \theta = X$ とする。 ③ $\sin \theta + \cos \theta = X$ とする。
④ $\sin \theta - \cos \theta = X$ とする。 ⑤ $\sin \theta \cos \theta = X$ とする。

<http://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf> で①と②を解説しました。

<http://www.hmg-gen.com/sankaku7.pdf> で③を解説しました。

本日は、④の $\sin \theta - \cos \theta = X$ と置き換えるパターンの問題を解説していきます。前回、与式が $\sin \theta + \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式、つまり与式が $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式だったら $\sin \theta + \cos \theta = X$ と置き換えて解いていくと話しました。今回も、前回とほとんど同じなのですが、次のことを覚えてください。

覚えるべき三角関数の置き換え

三角関数の問題で与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみで表されている時、
 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えて解いていく！

与式が $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式のときは $\sin \theta + \cos \theta = X$ とおいて解いていき、交代式のときは $\sin \theta - \cos \theta$ とおいて解いていきます。対称式、交代式についてよくわからないという人は対称式のプリント (<http://www.hmg-gen.com/taisyouusiki.pdf>) を見てください。

なぜ $\sin \theta - \cos \theta = X$ と置き換えるといいかという理由はほとんどの人が分かると思うけど、 $\sin \theta - \cos \theta = X$ と置き換えると、この式を変形することによって(下記参照) $\sin \theta \cos \theta$ も X を使って表すことができます。これより与式が X のみの関数になって考えやすくなります。

$$\sin \theta - \cos \theta = X$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = X^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を2乗した}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 1 - X^2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2} \quad \blacktriangleleft \sin \theta \cos \theta \text{ を } X \text{ のみで表せた！}$$

問題

$y = -2 \sin \theta \cos \theta - 2a(\sin \theta - \cos \theta)$ の最小値を求めよ。

【解説】

この問題は、与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみでできているので $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

文字を置き換えた時は、置き換えた文字の値の範囲に注意するので $X = \sin \theta - \cos \theta$ の値の範囲を求めないといけません。 $a \sin \theta + b \cos \theta$ の形をしているときは三角関数の合成を使って解いていきます。

合成が分からないという人は、前回のプリント (<http://www.hmg-gen.com/sankaku7.pdf>) を見てください。

文字を置き換えることによって、この問題は単なる場合分けの必要な2次関数の最大値・最小値問題になります。では、解答に進みます。

【解答】

$X = \sin \theta - \cos \theta$ とする

$$= \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$

$$-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ より } -\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2} \text{ となる。}$$

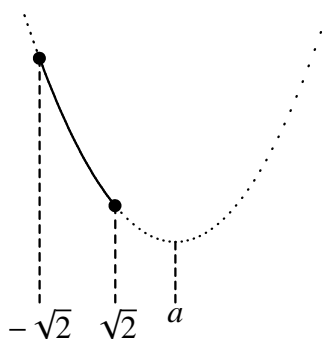
↑ 文字を置き換えた時は範囲に注意する。 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えたので X の値の範囲を求めた。今回の問題では θ に値の範囲がないので当然 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ の値の範囲は $-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となります。

$$\sin \theta - \cos \theta = X \text{ のとき } \sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2} \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned}
y &= -2(\sin \theta - \cos \theta) - 2a(\sin \theta - \cos \theta) \\
&= -2 \frac{1 - X^2}{2} - 2aX \leftarrow \sin \theta - \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2}, \sin \theta \cos \theta = X \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= -(1 - X^2) - 2aX \\
&= X^2 - 2aX - 1 \\
&= (X - a)^2 - a^2 - 1 \quad (-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2})
\end{aligned}$$

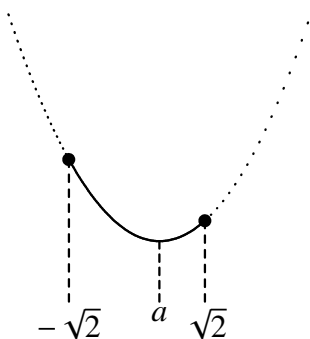
後は単なる場合分けの必要な2次関数の最大値、最小値の問題です。定義域が軸の左側、軸を含む、軸の右側、この3パターンに場合分けされます。このあたりが分からないという人は、今から2次関数の問題をしっかりと復習しておいてください。三角関数に限らず指数対数なんかでも、最初の文字の置き換えが終了したらそこからは単なる2次関数の問題になるということは本当に多いです。

(i) $a \geq \sqrt{2}$ のとき



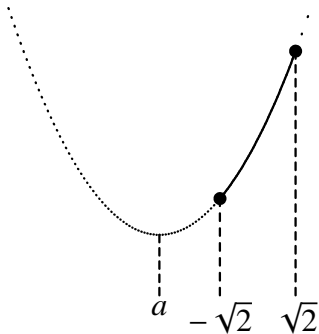
グラフより $X = \sqrt{2}$ で最小値 $\sqrt{2}^2 - 2a\sqrt{2} - 1 = 1 - 2\sqrt{2}a$ をとる。

(ii) $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ のとき



グラフより $X = a$ で最小値 $-a^2 - 1$ をとる。

(iii) $a \leq -\sqrt{2}$ のとき



グラフより $x = -\sqrt{2}$ のとき、最小値 $(-\sqrt{2})^2 - 2a(-\sqrt{2}) - 1 = 2\sqrt{2}a + 1$ をとる

これで今回のプリントは終了です。プリントの中でも話しましたが三角関数や指数対数の問題では最初の式変形が三角関数や指数対数の知識が必要で、そこからは単なる2次関数の問題ということが多いです。

そして三角関数や指数対数の最初の式変形なんですけど、ほとんどの場合解き方が決まっておりますその解き方さえ覚えていたら本当にワンパターンで解けてしまいます。

「三角関数の問題が分からないんです」と言ってくる人がいますが、そう言ってくる人のほとんどは「分からないんじゃなくて覚えていないだけ」なんです。

だって、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式のときは $\sin \theta + \cos \theta = X$ と置き換え、今回説明した問題ですが交代式のときは $\sin \theta - \cos \theta = X$ と置き換えるということを知っていたら悩むポイントなんてありませんよね。

2次関数が理解できていないのならまた別ですが、2次関数が理解できていたら本当に簡単です。

簡単とは言いましたが、最初は難しいと感じる人もいます。そんな人は、何度も何度も解きなおして解法をしっかりと覚えてしまってください。

次回は、文字を置き換える問題の最後のパターン $\sin \theta \cos \theta = X$ と置き換える問題を解説します。

それではがんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com