三角関数No9.
「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART4.」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第９回。
「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART4.」です。

三角関数には、文字の置き換えの必要な最大値・最小値問題がよく出題されます。

実際の大学受験で出題される文字の置き換えは次の５パターンくらいです。

① $\sin\theta = X$ とする。　② $\cos\theta = X$ とする。　③ $\sin\theta + \cos\theta = X$ とする。
④ $\sin\theta - \cos\theta = X$ とする。　⑤ $\sin\theta\cos\theta = X$ とする。

http://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf で ① と ② を解説しました。
http://www.hmg-gen.com/sankaku7.pdf で ③ を解説しました。
http://www.hmg-gen.com/sankaku8.pdf で ④ を解説しました。

本日は、置き換えの必要な最大値・最小値問題。⑤ の $\sin\theta\cos\theta = X$ と置き換えるパターンの問題を解説ていきます。

問題１

$2\sin^4\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^4\theta$ の最大値と最小値を求めよ

この問題をみて、どう解いていけばいいのかな？と思うよね。式変形について次のことを覚えておいてください。

式変形のポイント

① 係数の同じ者同士をペアにするとうまくいくことが多い。

② 次数の低いものよりも、高いものを変形していくことが多い。

このことを踏まえて $2\sin^4\theta+\sin\theta\cos\theta+2\cos^4\theta$ をもう一度みてみると、$2\sin^4\theta$ と $2\cos^4\theta$ の係数が同じだよね、しかも次数が高い。だから、これをペアにしたらうまくいくのかな？と気づけるようにしてほしいです。

うまくいくのかな？とクエスチョンマークを入れた理由としては、この段階ではこの解法でうまくいくかどうか分からない、でもこの解法が一番可能性が高そうということです。もしダメだったら、他の解法を考えます。

数学は、うまくいきそうな解法をとりあえず試してみて、それでダメならまた別の解法を試して、とうまくいくまであれこれと考えます。すべての問題で、解く前から解けると分かっているわけではありません。とりあえずうまくいきそうな解法をしらみつぶしに考えていきます。

上記の「式変形のポイント」をもう一度見てほしいのですが、「うまくいくことが多い」と書いてあります。必ずうまくいくわけではありません。とりあえずこうするとうまくいく可能性が高いという意味です。うまくいかなければその時に、違う解法を考えるようにしてください。

では、問題に戻ります。

とりあえず $2\sin^4\theta$ と $2\cos^4\theta$ をペアにしてみると $2\sin^4\theta + 2\cos^4\theta = 2(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$

で、ここから考えていくんだけど $2(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$ は対称式なんだから、とりあえず対称式の式変形をしていくくらいしかないよね。

対称式が分からないという人は、このプリントを見てください。
http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta + \cos^4\theta &= (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 \\
&= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta
\end{aligned}$$

⇑ 対称式の公式 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ に $a = \sin^2\theta,\ b = \cos^2\theta$ を代入した

$= 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ ◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$2\sin^4\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^4\theta = 2(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta) + \sin\theta\cos\theta$ って式変形をできたわけなんだけど、ここで何かに気づかない？ここで少しヒントを

最大値・最小値問題の考え方

最大値・最小値の問題では、基本的に２変数関数 (変数が２つ) では考えられない。
そこで置き換えなどを使ってなんとか１変数関数 (変数が１つ) にする。

このことを踏まえて、もう一度 $2(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta) + \sin\theta\cos\theta$ を見て欲しいんだけど $\sin^2\theta\cos^2\theta = (\sin\theta\cos\theta)^2$ なんだから、与式は $\sin\theta\cos\theta$ のみの式になっていない？だから $\sin\theta\cos\theta = X$ と置き換えたら、X に関する１変数関数になるので、あとはただ単に２

次関数の簡単な最大値、最小値問題を解くだけです。

＊ 三角関数の第７回の中で三角関数の対称式なら $\sin\theta+\cos\theta=X$ と置き換えて解いていくと話しました。この問題も対称式なので $\sin\theta+\cos\theta=X$ と置き換えても解くことができます。ただ、こう置き換えた場合この問題では X に関して４次関数になってしまいます。一般に数学は次数が低い方が計算が楽なので、今回の問題では $\sin\theta\cos\theta=X$ と置き換えたほうがいいです。

では、問題に進みます。$X=\sin\theta\cos\theta$ と文字を置き換えたんだけど、文字を置き換えた時は範囲に注意しないといけないから当然 X の範囲を考えないといけません。X の値の範囲を求めるんだけど、典型的な誤答を書いておきます。

誤答

$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\ -1\leqq\cos\theta\leqq1$ より、$-1\leqq\sin\theta\cos\theta\leqq1$

上記はどこが間違っているか分かる？これがもし $-1\leqq X\leqq1,\ -1\leqq Y\leqq1$ で X,Y が互いに自由な値をとるのなら $-1\leqq XY\leqq1$ となります。

この「互いに自由」というところがポイントです。互いに自由なんだから $X=1,Y=-1$ のとき $XY=-1$ となります。

でも、$\sin\theta\cos\theta=-1$ となるときは、$\sin\theta=1$ かつ $\cos\theta=-1$っていう値 ($\sin\theta=1$ かつ $\cos\theta=-1$ の場合もあるけど) を同時にとることはないよね。なぜかというと $\sin\theta=1$ は $\theta=90^\circ$ のとき、$\cos\theta=-1$ は $\theta=180^\circ$ のとき、$\sin\theta=1$ かつ $\cos\theta=-1$ってなることはありえないんだ。＊ $\sin\theta=1$ は正確には $\theta=90^\circ+360^\circ n$ でも、ここでは、$\sin\theta=1$ かつ $\cos\theta=-1$ となることはありえないということさえ分かってもらえばいいので割愛しました

値の範囲を求める時は、関係があるか、ないか考えるようにしておいてください。

$\sin\theta\cos\theta$ の値の範囲はよく出てきますが、実は sin の２倍角の公式で考えるのが一番楽です。

$-1\leqq\sin2\theta\leqq1$ ◀ θ が全ての範囲を動くとき、当然 $\sin2\theta$ の値の範囲は $-1\leqq\sin2\theta\leqq1$

$-1\leqq2\sin\theta\cos\theta\leqq1$ ◀ ２倍角の公式 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より

$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ ◀ 全部の辺を２で割って $\sin\theta\cos\theta$ の値の範囲が求まった

$\sin\theta\cos\theta$ の値の範囲が $-\dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ となることについてはよく出てくるので、しっかりと覚えておいてください。

これで問題の準備が終わりました。それでは解答に進みます。

問題 1

$2\sin^4\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^4\theta$ の最大値と最小値を求めよ

【解答】

$2\sin^4\theta + \sin\theta\cos\theta + 2\cos^4\theta$

$=2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \sin\theta\cos\theta$

$=2\left\{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right\} + \sin\theta\cos\theta$

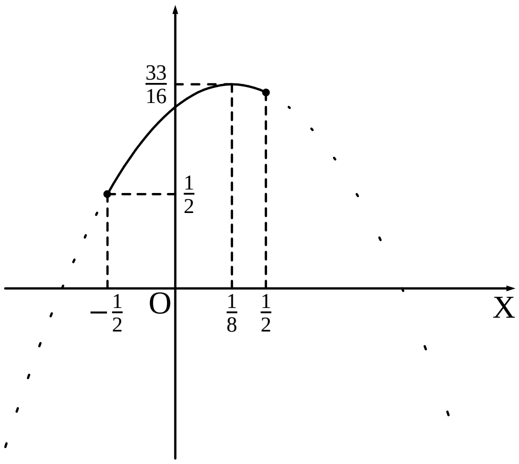
$=2(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta) + \sin\theta\cos\theta$

ここで $\sin\theta\cos\theta = X$ $(-\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq \dfrac{1}{2})$ とする

$= -4X^2 + X + 2$

$= -4(X^2 - \dfrac{1}{4}X) + 2$

$= -4(X - \dfrac{1}{8})^2 + \dfrac{33}{16}$



グラフより最大値 $\dfrac{33}{16}$、最小値 $\dfrac{1}{2}$

＊ 最大値、最小値の問題のときはどんな問題でも最大値や最小値を与える θ の値を求めようとする人がいますが、問題文に θ の値を求めよという表現がない限り求める必要はないです。多くの学校では、何も表現がなくても求めていると思います。パッと見です

ぐに分かるような問題は書いたほうがいいかもしれませんが、受験では求めよという表現がない場合求められないか、または求められたとしても、めちゃくちゃ計算がややこしい場合がほとんどです。数学は基本的に言われた内容以外のことはしなくていいので求めなくていいと思います。仮に減点されるとしても微々たるものです。

では、次の問題に進みます。

問題 2

(1) $X = \sin\theta\cos\theta$ とする。X の値の範囲を求めよ。

(2) $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ を X で表せ。

(3) $\sin^8\theta + \cos^8\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】(1), (2)
(1), (2) は、問題 1 でもやったので答えだけを書いておきます。

【解答】
(1)
$$-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin^4\theta + \cos^4\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - 2X^2\end{aligned}$$

【解説】(3)
まず、数学の常識として次のことは覚えておいてください。

数学の考え方

数学の問題では前問の結果を使って解いていくことが多い。

数学では (1),(2)$\cdots$ となっていれば (2) を解くときに (1) をヒントにして解いていくことが多いです。特に、受験として出題されるには (1) があまりに簡単なとき、と (1) と (2) の形が似ている時は、前問の結果を使って解いていくことが多いです。

意味もなく、ごくごく簡単な問題が受験に出題されるということはほとんどありません。だから、あまりに簡単な問題が出てきたらどこかでヒントに使うんだろうと思うようにしてください。

この問題でも (3) は (2) を使って解いていくんだろうけど、
$\sin^8\theta+\cos^8\theta=(\sin^4\theta)^2+(\cos^4\theta)^2$ と変形したらなんとか (2) の結果が使えそうな形になるよね。この問題は、これで解いていきます。

【解答】(3)

$\sin^8\theta+\cos^8\theta$

$=(\sin^4\theta)^2+(\cos^4\theta)^2$ ◀ (2) を使うために $\sin^4\theta$ と $\cos^4\theta$ を作った

$=(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2\sin^4\theta\cos^4\theta$ ◀ 対称式の公式 $s^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より

$=(1-2X^2)-2X^4$ ◀ (2) より $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2X^2$ を代入した

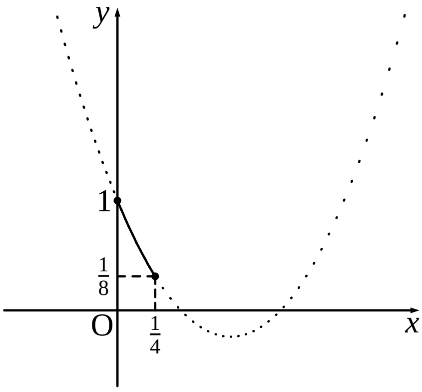
$=4X^4-4X^2+1-2X^4$

$=2X^4-4X^2+1$ ◀ X^2 のみの式になった

ここで、X のまま考えていってもいいが X^2 のみの式になったので、さらに $X^2=U$ とでも置き換えたら簡単になる。X の式だと 4 次関数で考えにくいが $X^2=U$ とすると U は 2 次関数なので考えやすい。文字を置き換えた時は範囲に注意するということを忘れないように

ここで $X^2=U$ とする。$-\frac{1}{2}\leqq X\leqq\frac{1}{2}$ より $0\leqq U\leqq\frac{1}{4}$ ◀ 置き換えた時は範囲に注意

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2U^2-4U+1\\
&= 2(U^2-2U)+1\\
&= 2(U-1)^2-1
\end{aligned}
$$



グラフより最大値 1、最小値 $\frac{1}{8}$ となる。

今回はこれで終了です。少し話したいことが多かったので日本語が多く、まわりくどい

と思った人もいるかもしれません。でも、普段数学を教えていて今日話したような数学の考え方を理解できていない人が本当に多いんです。今回話したような事柄をあまり知らなかったという人は、しっかりと勉強しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com