「$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$の加法定理を使った導きかた」

公式

$90^\circ - \theta$ の公式

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta, \qquad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

上記の公式はほとんどの人が覚えられていると思います。$90^\circ - \theta$だけだったらいいんですけど、$90^\circ + \theta$もあるし、$180^\circ - \theta$もあるし、それぞれ公式が微妙に違ってきます。

もちろん単位円なんかで考えてもできないことはないんだけど、三角関数の加法定理を使ったら簡単に導くことができます。公式を覚えても、出題頻度としてはそれほど多くないし、加法定理で簡単に導けるので、覚えるよりは出てくるたびにその都度、加法定理で導いた方がいいと思います。

加法定理での導き方はごくごく簡単なものなのでしっかりと理解しておいてください。

加法定理は大丈夫だと思うけど、一応まとめておきます。もし、覚えられていないというのならしっかりと覚えておいてください。

加法定理

① $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

⑥ $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

では、加法定理を用いて $90^\circ - \theta$ の公式を求めていきますね。

$$\sin(90^\circ - \theta) = \sin 90^\circ \cos\theta - \cos 90^\circ \sin\theta$$ ◀ 加法定理を使って展開した

$$= 1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta$$ ◀ $\sin 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0$ をそれぞれ代入

$$= \cos\theta$$

$$\therefore\ \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos 90^\circ \cos\theta + \sin 90^\circ \sin\theta$$ ◀ 加法定理を使って展開した

$$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$$ ◀ $\sin 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0$ をそれぞれ代入

$$= \sin\theta$$

$$\therefore\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

これで sin と cos の公式を求めることができたから、残りは tan 公式を導くだけだよね。多くの人が tan の加法定理を使って求めようとするけど、$\tan(90^\circ - \theta)$ は加法定理では、展開できないよ。なぜかっていうと、$\tan 90^\circ$ は存在しないから。

次に求める $(180^\circ - \theta)$ の公式なら、tan の加法定理でも導けるけど、tan は sin や cos に比べ、加法定理も分数が出てきてややこしいし、グラフも難しいよね。そこで、tan の問題では sin や cos にして考えることが多いということを覚えておいてください。

tan の扱い方

tan は考えにくいので $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の関係式を利用して、考えることが多い。

このことを踏まえて $\tan(90^\circ - \theta)$ の公式を導きます。

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)}$$ ◀ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より $(\alpha = 90^\circ - \theta)$ のとき

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ ◀ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ をそれぞれ代入

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$ ◀ 分母分子を $\cos\theta$ で割った

$$= \frac{1}{\tan\theta}$$ ◀ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ より

$$\therefore\ \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

繰り返しになるけど、tan は考えにくいので sin と cos の式にしてから考えるということを覚えておいてください。それでは $(180^\circ - \theta)$ の公式を導いていきます。

公式

180° $-\theta$ の公式

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta, \qquad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

導き方は $(90^\circ - \theta)$ の時と同じく、加法定理を使って求めていきます。

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \theta) &= \sin 180^\circ \cos\theta - \cos 180^\circ \sin\theta \blacktriangleleft \text{加法定理を使って展開した}\\ &= 0 \cdot \cos\theta - (-1)\sin\theta \blacktriangleleft \sin 180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1 \text{ をそれぞれ代入}\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

$\therefore\ \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= \cos 180^\circ \cos\theta - \sin 180^\circ \sin\theta \blacktriangleleft \text{加法定理を使って展開した}\\ &= (-1) \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta \blacktriangleleft \sin 180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1 \text{ をそれぞれ代入}\\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

$\therefore\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}\tan(180^\circ - \theta) &= \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} \blacktriangleleft \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ より } (\alpha = 180^\circ - \theta) \text{ のとき}\\ &= \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} \blacktriangleleft \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \text{ をそれぞれ代入}\\ &= -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= -\tan\theta \blacktriangleleft \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \text{ より}\end{aligned}$$

$\therefore\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

今回は tan の加法定理でも導けるので、一応導いておきます。

$$\begin{aligned}\tan(180^\circ - \theta) &= \frac{\tan 180^\circ - \tan\theta}{1 + \tan 180^\circ \tan\theta} \blacktriangleleft \text{加法定理を使って展開した}\\ &= \frac{0 - \sin\theta}{1 + 0 \cdot \tan\theta} \blacktriangleleft \tan 180^\circ = 0 \text{ を代入した}\\ &= -\sin\theta \blacktriangleleft \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta \text{ が導けた}\end{aligned}$$

今回は数学Iの三角比で勉強する$90^\circ-\theta$と$180^\circ-\theta$の二つの公式を導きました。でも数学IIでは、これ以外にも$90^\circ+\theta$や$270^\circ-\theta$など、いろいろなものがでてきます。これらも今回解説した加法定理で導く方法ならその場で簡単に導けるので、わざわざ暗記する必要はありません。

今回解説したことは、本当に基本的なことですが、普段高校生を教えていて意外なほど理解できていない人が多いので、プリントを作りました。

簡単な内容だと思いますので、しっかりと解けるようになっておいてください。

河見賢司

数学の偏差値を５０から６０にするサイト
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com