

三角関数No1. 「三角関数の公式」

こんにちは河見賢司です。今回は三角関数で覚えなれないといけない公式を全て解説していきます。

三角関数の公式は覚えることが多く大変だと思っている人もいますが、ほとんどの公式は加法定理から簡単に導くことができます。ひとつずつ導き方を覚えていってください。

まずは加法定理から

加法定理

$$\textcircled{1} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{2} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{3} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{4} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{5} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\textcircled{6} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

暗記の仕方なのですが、覚えてくださいというしかないんですが有名なゴロ合わせとしてsinの加法定理は「サイタコスモスコスモスサイタ」で覚えてもらって、cosの加法定理はこれはあまり使っている人はいないんですが「コスコスノシンシント」です。「コスコスノシンシント」の「ノ」はマイナスを表しています。電話番号の「090-」で暗記したら覚えやすいと思います。

tanの加法定理は、僕は高校の先生から教えてもらったゴロ合わせ「イチマイナスタンプンノタンプラタン」で覚えています。言うのも恥ずかしいようなゴロ合わせなのですが、なぜか簡単に覚えられます。

覚え方は、好きなように覚えておいてもらえばいいんですけど、加法定理は三角関数の基本なのでこれは必ず覚えておいてください。

このところ受験で定理、公式を証明しなさいという問題が大学受験でよく出題されます。加法定理そのものを導きなさいという問題もここ最近もいくつかの大学で出題され

ています。

加法定理は、実は1年生のときに勉強した余弦定理を使って証明することができます。ここでは割愛しますが教科書には載っていると思うので自分で導けるようになっておいてください。

次に2倍角の公式です。

2倍角の公式

$$\textcircled{1} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\textcircled{2} \cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

2倍角の公式は、これから導きますが加法定理から簡単に導くことができます。ですがsinとcosの2倍角の公式に関しては本当によく出題されるので暗記するようにしてください。

なおcosの2倍角の公式はsinとcosで表したものの、sinのみで表したものの、cosのみで表したものの3通りありますが、全て暗記するようにしてください。

tanの2倍角の公式は、ほとんど出題されないなので暗記しなくていいです。その場で加法定理から導くようにしてください。

sinの2倍角の公式の証明

加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \leftarrow \alpha = \theta, \beta = \theta \text{を代入した}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \leftarrow \text{sinの加法定理が導けた！}$$

cos の 2 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = \theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \text{cos の加法定理が導けた！}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \text{cos の 2 倍角を sin のみで表した}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1 \quad \blacktriangleleft \text{sin の 2 倍角を cos のみで表した}$$

tan の 2 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta} \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = \theta \text{ を代入した}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \blacktriangleleft \text{tan の加法定理が導けた！}$$

では、次に 3 倍角の公式です。

3 倍角の公式

$$\textcircled{1} \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\textcircled{2} \cos 3\theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

3 倍角の公式は 2 倍角の公式のように頻繁に出てくるものではありません。今から証明しますがこの 3 倍角の公式も、加法定理と先ほど示した 2 倍角の公式を使えば簡単に導くことができます。簡単に導くことはできますが、少しメンドウです。有名なゴロ合わせもありますし、この 3 倍角の公式についても 2 倍角の公式と同様暗記しておくように

してください。

3倍角のゴロ合わせなんですが、これも人から聞いたものですが sin の3倍角の公式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「3」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「- (マイナス)」、「ヨ」は「4」、「シ」は「sin」、「ミ」は「3乗の3」です。

また cos の3倍角は sin の3倍角と符号が反対になり、sin のところに cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。変わったゴロ合わせなんですが、簡単に覚えられと思うので、ぜひとも利用してください。では、3倍角の公式を今から導きたいと思います。

-----sin の3倍角の公式の証明-----

加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta(1 - 2 \sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta(1 - \sin^2 \theta) \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の3倍角の公式が導けた！}$$

(*) sin の3倍角の公式は、sin のみで表せるので、証明するときのポイントは cos を sin で表せるときは、とにかく sin のみで表す方向に持っていくことです。

cos の 3 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 3\theta = \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$= -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の 3 倍角の公式が導けた！}$$

次に半角の公式です。この半角の公式は cos の 2 倍角の公式から簡単に導くことができます。簡単に導けるのでその場で導いてもらってもいいですが、理系の人は数学 III の積分で sin と cos の半角の公式を使う必要が出てくるので、理系の人は sin と cos の半角の公式は覚えるようにしてください。

文系の人は、それほど出題頻度が高いわけでもないしすぐに導けるので、覚える覚えないは自分で決めてもらえばよいと思います。

tan の半角の公式はほとんど出題されないの覚える必要はありません。出題されたらその場で導くようにしてください。

半角の公式

$$\textcircled{1} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\textcircled{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\textcircled{3} \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

sin の半角の公式の証明

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \quad \leftarrow \text{cos の 2 倍角の公式より}$$

$$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \text{sin の半角の公式が導けた！}$$

次に cos の半角の公式を導きます。

cos の半角の公式の証明

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \quad \leftarrow \text{cos の 2 倍角の公式より}$$

$$2\cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \text{cos の半角の公式が導けた！}$$

最後に tan の半角の公式ですが、これは sin と cos の半角の公式を使って求めていきます。

tan の半角の公式の証明

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \leftarrow \text{三角関数の相互関係式 } \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ より}$$

$$= \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \leftarrow \text{sin と cos の半角の公式をそれぞれ代入した}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad \leftarrow \text{tan の半角の公式が導けた！}$$

sin と cos の半角の公式はよく使うと話しましたが、実際に使うのは半角の公式にする一

つ手前の式 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ を使うことのほうが圧倒的に多いです。半角はここから簡単に導けるので理系の人は最低限ここまでの形を暗記しておくようにしてください。

これで今回のプリントは終了です。三角関数の公式については、あと積和の公式があります。積和の公式に関しては、また後日解説したいと思います。

今回の内容を見てもらえばわかると思いますが、三角関数は公式が多いと敬遠している人が多いですが、すべてが加法定理から簡単に導くことができます。重要なところなのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com