三角関数No1. 「三角関数の公式」

こんにちは河見賢司です。今回は三角関数で覚えないといけない公式を全て解説していきます。

三角関数の公式は覚えることが多く大変だと思っている人もいると思いますが、ほとんどの公式は加法定理から簡単に導くことができます。ひとつずつ導き方を覚えていってください。

まずは加法定理から

加法定理

① $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

⑥ $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

暗記の仕方なんですが、覚えてくださいというしかないんですが有名なゴロ合わせとして sin の加法定理は「サイタコスモスコスモスサイタ」で覚えてもらって、cos の加法定理はこれはあまり使っている人はいないんですが「コスコスノシンシント」です。「コスコスノシンシント」の「ノ」はマイナスを表しています。電話番号の「０９０－」で暗記したら覚えやすいと思います。

tan の加法定理は、僕は高校の先生から教えてもらったゴロ合わせ「イチマイナスタンタンブンノタンプラタン」で覚えています。言うのも恥ずかしいようなゴロ合わせなんですが、なぜか簡単に覚えられます。

覚え方は、好きなように覚えておいてもらえばいいんですけど、加法定理は三角関数の基本なのでこれは必ず覚えておいてください。

ここのところ受験で定理、公式を証明しなさいという問題が大学受験でよく出題されます。加法定理そのものを導きなさいという問題もここ最近もいくつかの大学で出題され

ています。

加法定理は、実は１年生のときに勉強した余弦定理を使って証明することができます。ここでは割愛しますが教科書には載っていると思うので自分で導けるようになっておいてください。

次に２倍角の公式です。

２倍角の公式

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 1 - 2\sin^2\theta \\ 2\cos^2\theta - 1 \end{cases}$

③ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

２倍角の公式は、これから導きますが加法定理から簡単に導くことができます。ですが sin と cos の２倍角の公式に関しては本当によく出題されるので暗記するようにしてください。

なお cos の２倍角の公式は sin と cos で表したもの、sin のみで表したもの、cos のみで表したものの３通りありますが、全て暗記するようにしてください。

tan の２倍角の公式は、ほとんど出題されないので暗記しなくていいです。その場で加法定理から導くようにしてください。

sin の２倍角の公式の証明

加法定理より

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=\theta$ を代入した

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ◀ sin の加法定理が導けた！

cosの2倍角の公式の証明

加法定理より

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=\theta$ を代入した

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ◀ cosの加法定理が導けた！

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta$ ◀ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ を代入した

$= 1 - 2\sin^2\theta$ ◀ cosの2倍角をsinのみで表した

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$ ◀ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ を代入した

$= 2\cos^2\theta - 1$ ◀ sinの2倍角をcosのみで表した

tanの2倍角の公式の証明

加法定理より

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\theta+\theta) = \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=\theta$ を代入した

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ◀ tanの加法定理が導けた！

では、次に3倍角の公式です。

3倍角の公式

① $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

② $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

3倍角の公式は2倍角の公式のように頻繁に出てくるものではありません。今から証明しますがこの3倍角の公式も、加法定理と先ほど示した2倍角の公式を使えば簡単に導くことができます。簡単に導くことはできますが、少しメンドウです。有名なゴロ合わせもありますし、この3倍角の公式についても2倍角の公式と同様暗記しておくように

してください。

３倍角のゴロ合わせなんですが、これも人から聞いたものですが sin の３倍角の公式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「3」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「−（マイナス）」、「ヨ」は「4」、「シ」は「sin」、「ミ」は「３乗の３」です。

また cos の３倍角は sin の３倍角と符号が反対になり、sin のところに cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。変わったゴロ合わせなんですが、簡単に覚えられると思うので、ぜひとも利用してください。では、３倍角の公式を今から導きたいと思います。

sin の３倍角の公式の証明

加法定理より

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta$ ◀ $\alpha=\theta,\beta=2\theta$ を代入した

$\sin 3\theta=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

⇑ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta,\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ代入した

$=\sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin\theta\cos^2\theta$

$=\sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$ ◀ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ を代入した

$=\sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin\theta-2\sin^3\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ◀ sin の３倍角の公式が導けた！

(＊) sin の３倍角の公式は、sin のみで表せるので、証明するときのポイントは cos を sin で表せるときは、とにかく sin のみで表す方向に持っていくことです。

cos の 3 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\theta+2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=2\theta$ を代入した

$$\cos 3\theta = \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

⇑ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ代入した

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$ ◀ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ を代入した

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$$

$$= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$$ ◀ sin の 3 倍角の公式が導けた！

次に半角の公式です。この半角の公式は cos の 2 倍角の公式から簡単に導くことができます。簡単に導けるのでその場で導いてもらってもいいですが、理系の人は数学 III の積分で sin と cos の半角の公式を使う必要が出てくるので、理系の人は sin と cos の半角の公式は覚えるようにしてください。

文系の人は、それほど出題頻度が高いわけでもないしすぐに導けるので、覚える覚えないは自分で決めてもらえばよいと思います。

tan の半角の公式はほとんど出題されないので覚える必要はありません。出題されたらその場で導くようにしてください。

半角の公式

① $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$

② $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$

③ $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

sinの半角の公式の証明

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ◀ cosの2倍角の公式より

$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

ここでθを$\dfrac{\theta}{2}$で置き換えると

$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{2}$ ◀ sinの半角の公式が導けた！

次にcosの半角の公式を導きます。

cosの半角の公式の証明

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ◀ cosの2倍角の公式より

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

ここでθを$\dfrac{\theta}{2}$で置き換えると

$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$ ◀ cosの半角の公式が導けた！

最後にtanの半角の公式ですが、これはsinとcosの半角の公式を使って求めていきます。

tanの半角の公式の証明

$\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ ◀ 三角関数の相互関係式 $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ より

$= \dfrac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ◀ sinとcosの半角の公式をそれぞれ代入した

$= \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ ◀ tanの半角の公式が導けた！

sinとcosの半角の公式はよく使うと話しましたが、実際に使うのは半角の公式にする一

つ手前の式 $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を使うことのほうが圧倒的に多いです。半角はここから簡単に導けるので理系の人は最低限ここまでの形を暗記しておくようにしてください。

これで今回のプリントは終了です。三角関数の公式については、あと積和の公式があります。積和の公式に関しては、また後日解説したいと思います。

今回の内容を見てもらえばわかると思いますが、三角関数は公式が多いと敬遠している人が多いですが、すべてが加法定理から簡単に導くことができます。重要なところなのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com