

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

三角関数No1. 「三角関数の公式」

こんにちは河見賢司です。今回は三角関数で覚えなれないといけな公式を全て解説していきます。

三角関数の公式は覚えることが多く大変だと思っている人もいると思いますが、ほとんどの公式は加法定理から簡単に導くことができます。ひとつずつ導き方を覚えていってください。

まずは加法定理から

加法定理

$$\textcircled{1} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{2} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{3} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{4} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{5} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\textcircled{6} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

暗記の仕方なんですが、覚えてくださいというしかないんですが有名なゴロ合わせとしてsinの加法定理は「サイタコスモスコスモスサイタ」で覚えてもらって、cosの加法定理はこれはあまり使っている人はいないんですが「コスコスノシンシント」です。「コスコスノシンシント」の「ノ」はマイナスを表しています。電話番号の「090-」で暗

記したら覚えやすいと思います。

\tan の加法定理は、僕は高校の先生から教えてもらったゴロ合わせ「イチマイナスタンタンブンノタンプラタン」で覚えています。言うのも恥ずかしいようなゴロ合わせなんですけど、なぜか簡単に覚えられます。

覚え方は、好きなように覚えておいてもらえばいいんですけど、加法定理は三角関数の基本なのでこれは必ず覚えておいてください。

このところ受験で定理、公式を証明しなさいという問題が大学受験でよく出題されます。加法定理そのものを導きなさいという問題もここ最近もいくつかの大学で出題されています。

加法定理は、実は1年生のときに勉強した余弦定理を使って証明することができます。ここでは割愛しますが教科書には載っていると思うので自分で導けるようになっておいてください。

次に2倍角の公式です。

2倍角の公式

$$\textcircled{1} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\textcircled{2} \cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

2倍角の公式は、これから導きますが加法定理から簡単に導くことができます。ですが \sin と \cos の2倍角の公式に関しては本当によく出題されるので暗記するようにしてください。

なお \cos の2倍角の公式は \sin と \cos で表したものの、 \sin のみで表したものの、 \cos のみで表したものの3通りありますが、全て暗記するようにしてください。

tan の 2 倍角の公式は、ほとんど出題されないので暗記しなくていいです。その場で加法定理から導くようにしてください。

-----sin の 2 倍角の公式の証明-----

加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = \theta \text{ を代入した}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の加法定理が導けた！}$$

-----cos の 2 倍角の公式の証明-----

加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = \theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \cos \text{ の加法定理が導けた！}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \blacktriangleleft \cos \text{ の 2 倍角を } \sin \text{ のみで表した}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1 \quad \blacktriangleleft \sin \text{ の 2 倍角を } \cos \text{ のみで表した}$$

tan の 2 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta} \quad \leftarrow \alpha = \theta, \beta = \theta \text{ を代入した}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \leftarrow \tan \text{ の加法定理が導けた！}$$

では、次に 3 倍角の公式です。

3 倍角の公式

$$\textcircled{1} \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\textcircled{2} \cos 3\theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

3 倍角の公式は 2 倍角の公式のように頻繁に出てくるものではありません。今から証明しますがこの 3 倍角の公式も、加法定理と先ほど示した 2 倍角の公式を使えば簡単に導くことができます。簡単に導くことはできますが、少しメンドウです。有名なゴロ合わせもありますし、この 3 倍角の公式についても 2 倍角の公式と同様暗記しておくようにしてください。

3 倍角のゴロ合わせなんですが、これも人から聞いたものですが sin の 3 倍角の公式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「3」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「- (マイナス)」、「ヨ」は「4」、「シ」は「sin」、「ミ」は「3 乗の 3」です。

また cos の 3 倍角は sin の 3 倍角と符号が反対になり、sin のところに cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。変わったゴロ合わせなんですが、簡単に覚えられと思うので、ぜひとも利用してください。では、3 倍角の公式を今から導きたいと思います。

sin の 3 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^3 \theta \quad \blacktriangleleft \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 3 \sin \theta - 3 \sin^3 \theta - \sin^3 \theta$$

$$= \mathbf{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta} \quad \blacktriangleleft \text{sin の 3 倍角の公式が導けた！}$$

(*) sin の 3 倍角の公式は、sin のみで表せるので、証明するときのポイントは cos を sin で表せるときは、とにかく sin のみで表す方向に持っていくことです。

cos の 3 倍角の公式の証明

加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \quad \blacktriangleleft \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 3\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos \theta^3$$

$$= \mathbf{-3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta} \quad \blacktriangleleft \text{cos の 3 倍角の公式が導けた！}$$

次に半角の公式です。この半角の公式は \cos の 2 倍角の公式から簡単に導くことができます。簡単に導けるのでその場で導いてもらってもいいですが、理系の人は数学 III の積分で \sin と \cos の半角の公式を使う必要が出てくるので、理系の人は \sin と \cos の半角の公式は覚えるようにしてください。

文系の人は、それほど出題頻度が高いわけでもないしすぐに導けるので、覚える覚えなはいは自分で決めてもらえばよいと思います。

\tan の半角の公式はほとんど出題されないなので覚える必要はありません。出題されたらその場で導くようにしてください。

半角の公式

$$\textcircled{1} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \textcircled{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \quad \textcircled{3} \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

sin の半角の公式の証明

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \quad \leftarrow \cos \text{ の 2 倍角の公式より}$$

$$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \sin \text{ の半角の公式が導けた！}$$

次に \cos の半角の公式を導きます。

-cos の半角の公式の証明-

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \quad \leftarrow \text{cos の 2 倍角の公式より}$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

ここで θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えると

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \leftarrow \text{cos の半角の公式が導けた！}$$

最後に tan の半角の公式ですが、これは sin と cos の半角の公式を使って求めていきます。

-tan の半角の公式の証明-

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \leftarrow \text{三角関数の相互関係式 } \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ より}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad \leftarrow \text{sin と cos の半角の公式をそれぞれ代入した}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad \leftarrow \text{tan の半角の公式が導けた！}$$

sin と cos の半角の公式はよく使うと話しましたが、実際に使うのは半角の公式にする一つ手前の式 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ を使うことのほうが圧倒的に多いです。半角はここから簡単に導けるので理系の人は最低限ここまでの形を暗記しておくようにしてください。

これで今回のプリントは終了です。三角関数の公式については、あと積和の公式があります。積和の公式に関しては、また後日解説したいと思います。

今回の内容を見てもらえばわかると思いますが、三角関数は公式が多いと敬遠している人が多いですが、すべてが加法定理から簡単に導くことができます。重要なところなのでしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司