∑（シグマ）に関する問題No1.

「公式を使ったシグマの計算」

今回から３回にわたって∑（シグマ）に関する問題を解説していきます。

普段、生徒にシグマを解説していて理解できていない人が意外なほど多いです。シグマは解きかたが決まっているので、解き方さえ覚えれば簡単です。プリントをやってもらえば分かると思いますが、覚えることもあまりなく比較的簡単なところです。シグマは数列だけでなく、数学 III の問題を解くのに必要となります。文系の人もシグマはしっかりと理解しないといけませんが、それ以上に理系の人はしっかりと理解しておくようにしてください。

シグマの計算は大きく分けると次の３パターンにわけることができます。

① 公式を使って解くパターン
② 互いに打ち消しあうパターン
③ ∑(等差)(等差) 型

今回はその中で、まず ① の公式を使ってとくパターンを解説していきます。

実際に問題に進む前に次のことを覚えておいてください。

∑ の性質

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
② $\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$
③ $\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k$

上の性質が成り立っているということはすぐに分かるかな？シグマが和であることを考えるとすぐに分かると思うけど、一応説明しておきます。

まずは①の $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ からです。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \\
&= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n) \blacktriangleleft \text{シグマの中身を具体的に書きだした} \\
&= (a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n) \blacktriangleleft \text{順番を変更した} \\
&= \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=(\text{右辺})_{//}
\end{aligned}
$$

次に②の $\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$ です。①とやることはほとんど同じなので簡単だと思います。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}pa_k \\
&= pa_1+pa_2+\cdots+pa_n \blacktriangleleft \text{シグマの中身を具体的に書きだした} \\
&= p(a_1+a_2+\cdots+a_n) \blacktriangleleft p\text{でくくった} \\
&= p\sum_{k=1}^{n}a_k=(\text{右辺})_{//}
\end{aligned}
$$

最後に③の $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$ です。これは①や②で導いた方法と同じように、シグマの中身を具体的に書き出してもらってもいいですがすでに証明が済んだ①と②を使って証明した方が簡単です。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}pa_k+\sum_{k=1}^{n}qb_k \blacktriangleleft \text{①の性質を使った} \\
&= p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k=(\text{右辺})_{//} \blacktriangleleft \text{②の性質を使った。証明終了！}
\end{aligned}
$$

次にシグマの公式を覚えてください。覚えるべき公式は次の４つです。この４つ以外覚える必要はありません。

シグマの公式

① $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ （c は定数）

② $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

＊（注 1）

$\sum_{k=1}^{2n}$ のように $\sum_{k=1}^{n}$ でない場合はどうするの？と思う人がいます。このときは、公式の n のところを $2n$ にします。

$\sum_{k=1}^{2n} = \frac{1}{2}2n(2n+1)$ ◀ $\frac{1}{2}n(n+1)$ の n を $2n$ にした

これと同じように $\sum_{k=1}^{n-1}$ のときは n のところを $n-1$ にして、$\sum_{k=1}^{3n}$ のときは n のところを $3n$ にします。

＊（注 2）

次に $\sum_{k=2}^{n}$ のように $\sum_{k=1}^{n}$ のように k が 1 から始まらない場合の話をします。シグマの公式を話しましたが、シグマの公式を使えるのは $k=1$ から始まるときのみです。だから $k=2$ のときは公式を使えません。

ですから $k=2$ から始まるときは、強引にシグマの公式を使える形に変形します。

$\sum_{k=2}^{n} a_k$ ◀ このままでは公式は使えない

$= a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ◀ シグマを書きだした

ここから考えないといけないんだけど、仮に $a_2+a_3+\cdots+a_n$ の部分が $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ だったら公式を使える形になるよね。このことを使い式変形をしていきます。

$\sum_{k=2}^{n} a_k$

$= a_2 + a_3 + \cdots + a_1$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a_1$ ◀ 無理やり公式を使える形に式変形をした

$= \sum_{k=1}^{n} a_k - a_1$

では、実際に問題に進みます。

問題 1

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3+2k)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$　(3) $\sum_{k=1}^{2n}(k^3+k)$

【解説】

この問題は、先ほど説明したシグマの性質と公式を利用すればばいいだけなので簡単に解けると思います。

【解答】

(1)

$\sum_{k=1}^{n}(3+2k)$

$= \sum_{k=1}^{n}3+2\sum_{k=1}^{n}k$ ◀ シグマの性質より

$= 3n+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$ ◀ シグマの公式を適用した

$= 3n+n(n+1)$

$= n^2+4n$

(2)

$\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$

$= 6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ ◀ シグマの性質より

$= 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$ ◀ シグマの公式を使った

$= n(2n^2+3n+1)+2n(n+1)+n$

$= 2n^3+3n^2+n+2n^2+2n+n$

$= 2n^3+5n^2+4n$

(3)

$\sum_{k=1}^{2n}(k^3+k)$

$= \sum_{k=1}^{2n}k^3+\sum_{k=1}^{2n}k$ ◀ シグマの性質より

$= \left\{\frac{1}{2}2n(2n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}2n(2n+1)$ ◀ シグマの公式を使った。今回は $2n$ であることに注意

$= \{n(2n+1)\}^2+n(2n+1)$

$= n(2n+1)\{n(2n+1)+1\}$ ◀ 共通因数 $n(n+1)$ でくくった。シグマは因数分解することが多い！

$= n(2n+1)(2n^2+n+1)$

問題 2

(1) $\sum_{k=2}^{n} k^2$　　(2) $\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^3$　　(3) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$

(1)

【解説】

今回は $k=2$ だから、いきなり公式を使えないよね。$k=1$ に無理やり式変形してから解いていきます。

【解答】

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 = 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 - 1^2$$ ◀ シグマの公式が使えるように強引に式変形をした

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 1$$ ◀ シグマの公式を使った。

$$= \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + n - 6)$$

(2)

【解説】

この問題は多くの人が、$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$ と展開してからシグマの公式を適用して解いていくと思います。もちろんこれでも解けないことないんだけど、少し面倒臭いよね。シグマを実際に書き出してみると他の解法が思いつくと思います。

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^3$$

$$= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$ ◀ シグマの中身を実際に書き出した

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$ ◀ 0^3 を消した。

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3$$

ここまできたら、公式を適用するだけだよね。こういうふうに、シグマの問題で計算が面倒臭そうな場合や、方針がたたないときはとりあえずシグマの中身を実際に書き出すとうまくいく場合が多いです。

（注）入試問題で、ただ面倒臭いだけの問題が出題されることはまずないと思ってかまいません。ですから、解法が思いついたとしてもあまりに面倒なものはほとんどの場合、他にもっとうまい解法があります。計算があまりにも面倒な場合はほかに解法があるのでは？と考えるようにしてください。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$$

$=0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3$ ◀ シグマの中身を実際に書き出した

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ ◀ シグマの公式より

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(3)

【解説】

これも (2) と同じように、シグマの中身を実際に書き出してから解いていきます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$$

$=2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$ ◀ シグマを実際に書き出した

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3-1^3$ ◀ 強引に公式が使える形に変形をした

$$=\sum_{k=1}^{n+1}k^3-1$$

$=\left\{\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}\right\}^2-1$ ◀ $n+1$ であることに注意してシグマの公式を適用した

$$=\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)^2-1$$

$=\left(\frac{n^2+3n+2}{2}+1\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{2}-1\right)$ ◀ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使った

$$=\frac{n^2+3n+4}{2}\cdot\frac{n(n+3)}{2}$$

$$=\frac{n(n+3)(n^2+3n+4)}{4}$$

シグマの第 1 回はこれで終わりです。次回はシグマの第 2 回、互いに打ち消しあうパターンの問題を解説します。今回の問題は理解できている人も多いと思いますが、次の互いに打ち消しあうパターンはできない人が多いです。できたとしてもなんとなく解けているという人が少なくありません。少しコツをつかめば決して難しいところではありませんので、しっかりと勉強するようにしてください。

河見賢司

数学の偏差値を５０から６０にするサイト
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com