$\sum$（シグマ）に関する問題No2.

「互いに打ち消しあうシグマの問題」

前回シグマに関する問題No1.http://www.hmg-gen.com/siguma1.pdfで公式を使ったシグマの問題を解説しました。今回、解説するのは「互いに打ち消しあうシグマの問題です」

前回、シグマの公式を解説しましたが。シグマの公式が使えるのは $\sum_{k=1}^{n} c$, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の４通りです。後、$\sum_{k=1}^{n} r^k$ もシグマの中身を実際に書き出せば分かると思いますが、等比数列の和の形になっているので、これも等比数列の第 n 項までの和の公式を使うことで求めることができます。

シグマの公式が使えるのは上記のみです。

シグマの問題で上記以外のもの、たとえば分数やルートが出てきたら公式は適用できません。そして、この公式が使えないパターンのシグマの問題は、まず間違いなく式変形することにより互いに打ち消しあう形になってくれています。

まずはこのことをしっかりと覚えておいてください。公式が使えないタイプのシグマは互いに打ち消しあう形に式変形できます。

互いに打ち消しあう形って言いましたが、これは難しく考えずシグマの中身が引き算の形になってくれたらOKです。例えば $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$ のような形です。

$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$ について

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

$$= (a_1 + \cancel{a_2 + a_3 + \cdots + a_n})$$ ◀ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ の中身を実際に書き出した

$$\quad -(\cancel{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + a_{n+1})$$ ◀ $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$ の中身を実際に書き出した

$$= a_1 - a_{n+1}$$ ◀ 同じ部分は互いに打ち消しあってくれて残ったものが解となる

ほとんどの教科書や問題集では

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$$

$$= (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1})$$ ◀ シグマの中身を実際に書き出した

$$= a_1 - a_{n+1}$$

上記のように解いています。もちろんこの方法でもいいのですが、これは 1 つずれるときは大丈夫ですが、二つ以上ずれるとき例えば $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2})$ のようなものは、どことどことが打ち消しあうか分かりにくくなります。でも、最初にやった方法だと、上と下を合わせて書くのでどこが消えるか一目瞭然です。ですから、最初にやった方法で解いていくようにしてください。

$\sum_{k=1}^{n}$(分数) は、公式が使えないので互いに打ち消しあってくれる形になります。分数を互いに打ち消しあう形にするには、部分分数の知識が必要となるので、シグマの問題に進む前に簡単に部分分数について解説します。

まず部分分数については次のことを覚えてください。

部分分数分解 I

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right)$$

文字式だから、少し難しく感じるかもしれませんが成立することは通分したらすぐにわかりますよ。

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{n+b}{(n+a)(n+b)} - \frac{n+a}{(n+a)(n+b)}\right)$$ ◀ 通分をした

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{n+b-(n+a)}{(n+a)(n+b)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{b-a}}{(n+a)(n+b)}$$

$$= \frac{1}{(n+a)(n+b)}$$ ◀ 同じ形になった！

部分分数の導き方なんですけど、上記で一応部分分数 I と書きましたが、これにあてはめ

て計算をするのはやめておいた方がいいです。この公式の意味を理解して自分で導けるようになっているのなら公式を利用してもいいと思いますが、公式を自分で導くこともできず、なんとなく適当に覚えている人は、時間がたてば公式を忘れてしまったり、何か違う公式と勘違いして間違って覚えてしまっているということが多いです。ですから、単に公式に代入するという手法はやめてください。**通分したら導けるんだ**ということをまずはしっかりと覚えておいてください。

部分分数は慣れてきたら一瞬でできるようになりますが、最初のうちは次のように考えていったらいいと思います。

例えば $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$ を部分分数分解をするのなら、とりあえず $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}$ の計算をします。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\\
=&\frac{n+3-(n+1)}{(n+1)(n+3)} \quad \text{◀ 通分した}\\
=&\frac{2}{(n+1)(n+3)}
\end{aligned}
$$

これが $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$ と等しくなるためには、全体に $\dfrac{1}{2}$ をかけないといけない。

よって $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}\right)$ となる。

ながながとやったので難しそうに思えるかもしれませんが、簡単です。今回は、はじめてなので丁寧に書きましたが、これを一瞬で頭の中で考えて、部分分数分解をするようにしてください。

補題 1 .

次の分数を部分分数を分解せよ。

(1) $\dfrac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\dfrac{1}{(n+2)(n+5)}$　　(3) $\dfrac{1}{(n+3)(n+9)}$

【解説】
この問題は、先ほど解説したことを理解できていたら簡単だと思うので答えのみ書いておきます。一瞬で解けるようになるまで、しっかりと部分分数分解を理解するようにしてください。

【解答】

(1) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

(2) $\dfrac{1}{(n+2)(n+5)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+5}\right)$

(3) $\dfrac{1}{(n+3)(n+9)} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+9}\right)$

では、実際にシグマの問題に進みます。

問題１.

次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

【解説】(1)(2)

もう一度話しますが、$\sum$(分数) のときは、公式は使えません。このときは、式変形することで互いに打ち消しあう形になるます。そして、分数のとき、互いに打ち消しあう形にするには、先ほど説明した部分分数分解を利用して解いていきます。

【解答】

(1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$ ◀ 部分分数分解をした

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}\right)$$ ◀ シグマの中身を書きだした

$$- \left(\cancel{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}\right)$$ ◀ シグマの中身を書きだした

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$ ◀ 上下打ち消しあって残った項を書きだした

$$= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$ ◀ 通分をした

$$= \frac{n}{n+1}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right\}$$ ◀ 部分分数分解をした

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} \right) \right.$$ ◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を実際に書き出した

$$\left. - \left(\cancel{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$ ◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$ を実際に書き出した

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$ ◀ 上下打ち消しあって残った項を書きだした

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$ ◀ 通分をした

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$ ◀ これが答え

(3)

【解説】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ これもシグマの分数なので部分分数分解してから解いていきます。

部分分数分解 I で、

部分分数分解 I

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)}$$
$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right)$$

と話しました、この公式に適用するのなら $(3k-2)(3k+1)$ の k の係数が 1 じゃないとダメなので、$(3k-1)(3k+1) = 9(k-\frac{1}{3})(k+\frac{1}{3})$ と直してから部分分数分解していけばいいのですが、分数がでてくるので少し面倒です。$(3k-2)(3k+1)$ のままでも部分分数分解

できます。

$\dfrac{1}{(3k-2)(3k+2)}$ を部分分数分解します。

とりあえず $\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}$ の計算をします。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\\
&=\frac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした}\\
&=\frac{3k+1-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)}\\
&=\frac{3}{(3k-2)(3k+1)}
\end{aligned}$$

以上より、$\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right)$ となります。

【解答】

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k+1}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}+\cancel{\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{3n-2}}\right)\right. \quad \blacktriangleleft \text{シグマの中身を実際に書き出した}\\
&\qquad\left.-\left(\cancel{\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{3n-2}}+\frac{1}{3n+1}\right)\right\} \quad \blacktriangleleft \text{シグマの中身を実際に書き出際た}\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) \quad \blacktriangleleft \text{上下打ち消しあって残った項を書きだした}\\
&=\frac{1}{3}\,\frac{3n+1-1}{3n+1}\\
&=\frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{3}n}{3n+1}\\
&=\frac{n}{3n+1} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}
\end{aligned}$$

問題 1 を解いてみて分かったと思いますが、シグマの分数の解き方のポイントはうまく部分分数分解することです。シグマの部分分数分解では、もうひとつ覚えないといけないことがあります。

部分分数分解 II

$$\frac{1}{(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)(n+m+l)}$$
$$=\frac{1}{l}\left\{\frac{1}{(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)}-\frac{1}{(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)(n+m+l)}\right\}$$

この部分分数分解 II も部分分数分解 I と同じで意味を理解してから公式を理解して下さい。部分分数分解 II は少し難しいそうですが簡単ですよ。

まず、分母の $(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)(n+m+l)$ は連続する l 個の整数です。連続していたら l はいくらでもかまいません。たとえば次のような分数を部分分数分解するのに、この部分分数分解 II を利用します。

$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ◀ 分母は連続した 3 つの整数

$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ ◀ 分母は連続した 4 つの整数

つぎに変形した後の $\dfrac{1}{(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)}-\dfrac{1}{(n+m+1)\cdots(n+m+l-1)(n+m+l)}$ は、

例えば、3 つの連続する整数なら小さい方から 2 つ、大きい方から 2 つをペアにします。
また、4 つの連続する整数なら小さい方から 3 つ、大きい方から 3 つをペアにします。
5 つの連続する整数なら小さい方から 4 つ、大きい方から 4 つをペアにします。

言葉で説明しても分かりにくいと思うので、実際に次の補題を解いてみてください。

補題２.

次の分数を部分分数を分解せよ。

(1) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$　　(2) $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

(3) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

(1) 【解説】
分母が $k(k+1)(k+2)$ と連続する 3 つの整数なので、小さい方から 2 つ $k(k+1)$ と大きい方から 2 つ $(k+1)(k+2)$ で考えます。

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k+2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k(k+1)(k+2)}$$ ◀ 通分をした
$$= \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

これが $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ と等しくなるには、2 で割ればよい。

(1) 【解答】
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

(2) 【解説】
分母が $(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ と連続する 3 つの整数なので、小さい方から 3 つ $(k+1)(k+2)(k+3)$ と大きい方から 3 つ $(k+2)(k+3)(k+4)$ で考えます。

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$
$$= \frac{k+4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$ ◀ 通分をした
$$= \frac{k+4-(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$
$$= \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

これが $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$ と等しくなるには、3 で割ればよい。

(2) 【解答】
$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right)$$

(3) 【解説】

分母が $k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ と連続する 5 つの整数なので、小さい方から 4 つ $k(k+1)(k+2)(k+3)$ と大きい方から 4 つ $(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ で考えていきます。

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{k}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$ ◀ 通分をした

$$= \frac{k+4-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

これが $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$ と等しくなるには、4 で割ればよい。

(3) 【解答】

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right)$$

このことを踏まえて、次の問題を解いていってください。

問題２.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

(1)

【解説】

これは部分分数分解して解いていくだけです。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$ ◀ 部分分数分解をした。補題 2 (1) と同じ

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$ ◀ 上下打ち消しあった残った項を書き出した

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ ◀ これが答え

(2)

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right)$$ ◀ 部分分数分解をした補題 2 (2) と同じ

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cancel{\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\cancel{\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)$$ ◀ 上下打ち消しあって残った項を書き出した

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(n+2)(n+3)(n+4) - 24}{24(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{n(n^2+9n+26)}{24(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{n(n^2+9n+26)}{72(n+2)(n+3)(n+4)}$$ ◀ これが答え

(3)
この問題もシグマの分数の問題だから、部分分数分解をして解いていくんだけど、今回の問題はひと工夫しないと部分分数分解ができません。

これまでは分子が数字（今まではすべて 1）だったから、簡単に部分分数分解できたけど、この問題は $\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$ で、分子が文字式だよね。だから、いきなり部分分数分解することはできないんだ。こういった問題は、無理やり分子を数字のみにしてから部分分数分解していくということを覚えておいてください。

どうやるかというと
$$\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k}{k(k+1)(k+2)} + \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$
こうしたら分子が数字のみになってくれたよね。意外によく出てくるので、しっかりと覚えておいてください。

シグマの部分分数分解

シグマの部分分数分解は、分子が数字でないと部分分数分解できない。分子が、文字式のときは強引に式変形をして分子が数字のみにしてから解いていく。

では、解答に進みます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k(k+1)(k+2)} + \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \right)$$ ◀ 強引に分子を数字のみに変形した

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

ここで ◀ 一度に計算するのは面倒なので分けて計算していきます。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$ ◀ 部分分数分解をした

$$= \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}} \right)$$

$$- \left(\cancel{\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n}{2(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= 4\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad (\because (1))$$ ◀ (1) より。「∵」とはなぜならという記号です

$$= \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

よって

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

$\Uparrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ をそれぞれ代入した

$= \dfrac{n(n+1)}{2(n+1)(n+2)} + \dfrac{2n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$ ◀ 通分をした

$= \dfrac{n^2+n+2n^2+6n}{2(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{3n^2+7n}{2(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ ◀ これが答え

(4)
【解説】
この問題も分数を数字のみに無理やり式変形をします。

$\dfrac{k}{(k+1)!}$

$= \dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!}$ ◀ 分子を数字のみにするために、無理やり式変形をした

$= \dfrac{k+1}{(k+1)!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$

$= \dfrac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)}\,k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$ ◀ $(k+1)! = (k+1)\,k!$ より。意味が分からない人は下の（注）参照

$= \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$

（注）$(k+1)! = (k+1)\,k!$ について
$(k+1)! = (k+1)\,k!$ 文字式の説明より、数字の方が分かりやすいので数字で説明します。$(k+1)! = (k+1)\,k!$ は、例えば $k = 4$ なら、$5! = 5\cdot 4!$ ってなることだよね。$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ってなるよね $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$ だから $5! = 5\cdot 4!$ になります。

$(k+1)! = (k+1)\,k!$ もこれと同じように説明がつきます。

$(k+1)!$
$= (k+1)\cdot k\cdot (k-1)\cdots 2\cdot 1$
$= (k+1)\times k\cdot (k-1)\cdots 2\cdot 1$
$= (k+1)\,k!$ ◀ $k\cdot (k-1)\cdots 2\cdot 1 = k!$ より

では、解答進みます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)\,k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1!} + \cancel{\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} \right)$$

$$- \left(\cancel{\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$ ◀ これが答え

今回、最後の問題です。

問題３.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k+2}$

これまで何度か説明してきましたが、シグマで公式を使えないタイプの問題はまず間違いなく互いに打ち消しあうタイプです。互いに打ち消しあう形にするには、○ − ○のようにマイナスの形がでてこないといけません。

シグマのにルートが出てきたら、まず間違いなく有理化をしたらうまくいきます。ルートは有理化したらうまくいきますが、その他の場合でも、公式が使えないシグマの問題では、なんとかしてマイナスを出すということを念頭に置いて解いていくようにしてください。

それでは解答に進みます。

(1)
【解説】
ルートの問題なので有理化したらうまくいきます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}$$ ◀ 有理化をした

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$ ◀ 互いに打ち消しあう形になった

$$= \qquad (\cancel{\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}+\sqrt{n+1})$$

$$-(\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}})$$

$$= \sqrt{n+1}-1$$ ◀ これが答え

(2)
【解説】
公式が使えないシグマの問題なので、何とか互いに打ち消しあう形に持っていきます。
これくらいはすぐに気づいて欲しいのですが、対数の公式 $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ を使えば互いに打ち消しあう形になってくれます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{\log_2(k+1) - \log_2(k+2)\}$$ ◀ 対数の公式 $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ より

$$= \log_2 2 + \cancel{\log_2 3 + \cdots + \log_2(n+1)}$$

$$\qquad - \{\cancel{\log_2 3 + \cdots + \log_2(n+1)} + \log_2(n+2)\}$$

$$= \log_2 2 - \log_2(n+2)$$

$$= \log_2 \frac{2}{n+2}$$ ◀ これが答え

今回はこれで終了です。お疲れ様でした。今回話した、互いに打ち消しあう形の問題はシグマの中では一番受験に出やすいタイプです。また、数学 III の極限ではさらに複雑な形のものも出てきます。ですが、今回の内容さえ理解しておけばそれほど難しいものではありません。シグマにあまり慣れていない人にとって、今回のプリントは少し難しかったかもしれませんが、慣れてくると簡単です。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

少し難しくなるととけなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com