$\sum$（シグマ）に関する問題No３.

「$\sum$ (等差) (等比) 型」

今回はシグマの第３回め「$\sum$ (等差) (等比) 型」を解説します。$\sum$ (等差) (等比) 型とは、どんな数列かと言えば、例えば $\sum k \cdot 5^k$ のようなものです。シグマの左側の k は等差数列、右側の 5^k は等比数列になっているよね。こういったものを $\sum$ (等差) (等比) 型と呼んでいます。

この $\sum$ (等差) (等比) 型は解き方が決まっています。どう、解くかと言えば元のシグマから、シグマに公比をかけたものを引いて求めていきます。解き方としては、等比数列の公式を導くときに使った手法と同じです。

とはいっても等比数列の和の導き方を知らない人がいると思うので、練習がてら導いてみます。

等比数列の公式

初項 a、公比 r の等比数列の一般項 a_n と第 n 項までの和 S_n は、
$a_n = a\,r^{n-1}$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ a\,n \quad (r=1) \end{cases}$$

S_n を求めていきますね。S_n を求めるには、$S_n - r\,S_n$ をします。なぜこうなるか？と聞かれてもこうやったらうまくいくからとしか答えようがありません。数学では、こういったものも多いです。とにかくひとつずつ解き方を覚えていってください。

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + \cancel{a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} \\ -)\quad r\,S_n = & \quad\;\; \cancel{a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} + a_1 r^n \\ \hline (1-r)\,S_n = & a_1 - a_1 r^n \\ (1-r)\,S_n = & a_1(1-r^n) \end{array}$$

ここから S_n について解きたいんだけど、何も考えずに両辺を $1-r$ で割ったら、ダメだ

よ。両辺を文字で割るときは必ず、その文字が0になるかどうか確認しないとダメだったんだよね。そして、0になる可能性があるなら場合分けして考えていきます。重要なので、もう一度言っておきます。

等式の両辺を文字で割る時の注意点

等式の両辺を文字で割るときは、その文字が0になる可能性があるかどうか必ず確認する。0になる可能性がある時は、0の場合とそれ以外の場合で場合分けして解いていく。

このことを踏まえて、$(1-r)S_n = a_1(a-r^n)$ は $1-r=0$ つまり $r=1$ のときとそれ以外 $r \fallingdotseq 1$ のときで場合訳が必要です。

(i) $r \fallingdotseq 1$ のとき

$$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$ ◀ $1-r \fallingdotseq 0$ より、両辺を $1-r$ で割った

$$= \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$ ◀ 分母分子に -1 をかけた

(ii) $r=1$ のとき

$S_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1$ ◀ $r=1$ のときの S_n をすべて書き出した。a_1 を n 回足し合わせる

$= n a_1$

これで、等比数列の和の公式が導けました。今回、解説する「$\sum$ (等差) (等比) 型」もこれと同じように求めます。

まず $\sum$(等差) (等比) $= S_n$ とでもおいて、S_n をシグマの中身を具体的にすべて書き出します。あとは $S_n - rS_n$ の計算をするだけです。流れとしてはこれだけですが、少し計算量が多く初めのうちは大変だと思います。慣れてくると簡単なので、慣れるまで何度も何度も練習するようにしてください。

問題１.

次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$ (2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^k$

(1)

【解答】

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$ とする。

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

⇑ シグマの中身を具体的に書き出した

$$2S_n = 2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n)$$ ◀ 両辺に公比２をかけた

$$= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \\ -)\ 2S_n = & \qquad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \\ \hline -S_n = & 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} \end{array}$$

◀ 上下の指数をそろえて書いた

ここで $2+2^2+2^3+\cdots+2^n = \dfrac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1}-2$ ◀ 初項２、公比２の等比数列第 n 項までの和

$-S_n = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$

$S_n = -2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} + 2$ ◀ これが答え

(2)

$T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^k$ とする

$$\begin{array}{rl} T_n = & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n \\ -)\ 3T_n = & \qquad 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1} \\ \hline -2T_n = & 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

◀ 上下の指数をそろえて書いた

ここで $3+3^2+3^3+\cdots+3^n = \dfrac{3(3^n-1)}{3-1} = \dfrac{3^{n+1}-3}{2}$ ◀ 初項３、公比３の等比数列第 n 項までの和

$$-2T_n = \frac{3^{n+1}-3}{2} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$\therefore T_n = -\frac{1}{4} \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4} + \frac{n \cdot 3^{n+1}}{2}$$ ◀ これが答え

今回は、これで終わりです。シグマの計算を３回にわたって話してきましたが、この３回をやっておけばとりあえず基本的な問題は大丈夫です。

解いてもらえば分かると思いますが、シグマの計算はいずれもワンパターンで解けるので、解き方さえ覚えてしまえば簡単です。慣れるまでは大変だとは思いますが、がんばって覚えてください。

河見賢司

少し難しくなるととけなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com