質問内容

すべての x に対して、$x^2+ax+a+3>0$ の不等式が常に成り立つような、定数 a の値の範囲を求めよ。

上記のような問題ってどうやって解くんですか？

そうですね。これって高校１年生で勉強する内容なんですけど、ややこしいですよね。

理解してしまえば簡単なんですけど、それまでは少し難しいです。理解できている人にとってはまわりくどいかもしれませんが、かなり詳しく解説していきます

まず、不等式の考え方なんですけどグラフで考えるということを理解しておいてください。問題に進む前にグラフで考える不等式の解法を説明します。

補題

次の不等式を解け

(1) $x-1>0$　　　　(2) $x^2-3x-4<0$

【解説】
不等式って実はグラフで考えるのが１番楽なんです。どういうふうに考えるのかとグラフの上下関係で考えるんです。

例えば (1) の $x-1>0$ を解けという問題は、まず $y=x-1$ と $y=0$ のグラフをかきます。

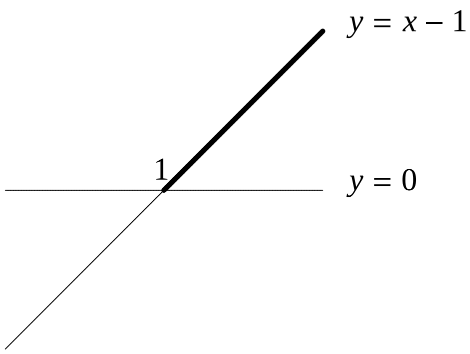
$x-1>0$ とは、$x-1$ の方が 0 のよりも大きくなるような x の値の範囲を求めよということです。

どっちの方が大きいかはグラフをかけばすぐに分かります。

y の値は xy 座標では上にいけばいくほど大きくなります。ということは $x-1>0$ は、$y=x-1$ のグラフと $y=0$ のグラフ２つかいてみて、$y=x-1$ の方が $y=0$ のグラフより上側にあるように x の値の範囲が答えになります。

軸があるとかえって見にくくなるので、軸なしのグラフをかきます。

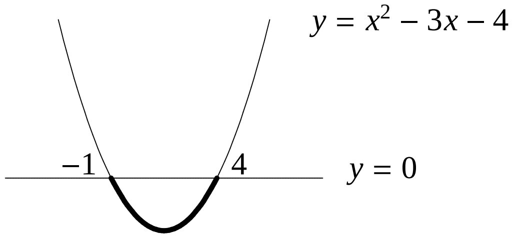
【解答】
(1)



上図を見てもらえば分かると思うけど、$y = x - 1$ と $y = 0$ ふたつのグラフを見比べて、$y = x - 1$ の方が $y = 0$ のグラフより上側にあるのは、上図の太線部これは $x > 1$ の範囲になります。

よって、$x - 1 > 0$ の解答は $x > 1$ となります。

(2)
$x^2 - 3x - 4 < 0$ を解く。$y = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$



グラフより、$y = x^2 - 3x - 4$ が $y < 0$ より下側にあるような x の値の範囲は $-1 < x < 4$

よって、$x^2 - 3x - 4 < 0$ の答えは $-1 < x < 4$ となる。

これでグラフを使った不等式の問題を解説しました。次に、判別式について話したいと思います。

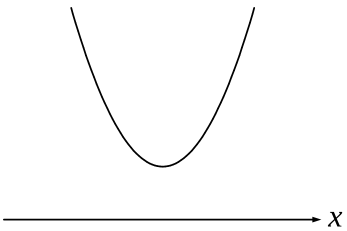
判別式とは２次関数と x 軸とが交点を持つかどうか判別するものです。知っている人も多いと思いますが判別式を D とすると、$D > 0$ のとき実数解２個、$D = 0$ のとき実数解１個、$D < 0$ のとき実数解なし。

判別式については、こちらのページでも解説しています。なぜ、$D > 0$ のとき実数解２

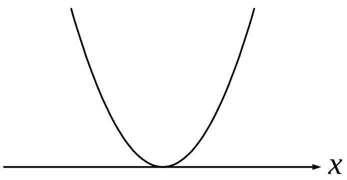
個となるかなどを理解したい人は、ぜひとも見てください。
http://www.hmg-gen.com/kaitou1-10.pdf

$ax^2+bx+c=0$ が 2 個の解をもつとは、さきほどの不等式と同じようにグラフで考えると $y=ax^2+bx+c$ と $y=0$ の交点が 2 個存在するということです。2 次関数は x^2 の係数の正負によって下に凸な 2 次関数か上に凸な 2 次関数が変わってきます。これらを踏まえて次の 6 パターンの図を理解して下さい。

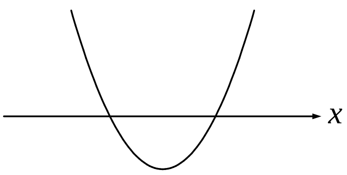
(i) $a>0,\ D<0$ のとき ($\Leftarrow$ 下に凸なグラフで、2 次関数と x 軸との交点がなしのとき)



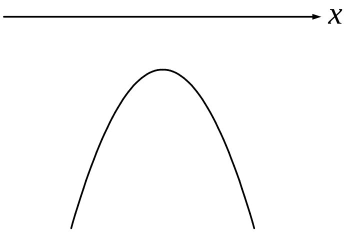
(ii) $a>0,\ D=0$ のとき ($\Leftarrow$ 下に凸なグラフで、2 次関数と x 軸が接するとき)



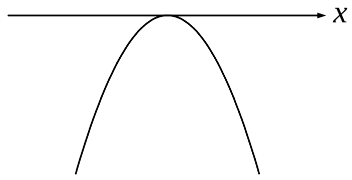
(iii) $a>0,\ D>0$ のとき ($\Leftarrow$ 下に凸なグラフで、2 次関数と x 軸が 2 点で交わるとき)



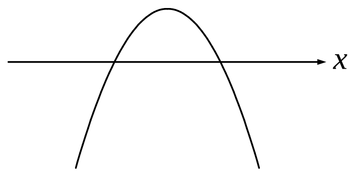
(iv) $a<0,\ D<0$ のとき ($\Leftarrow$ 上に凸なグラフで、2 次関数と x 軸との交点がなしのとき)



(v) $a < 0,\ D = 0$ のとき (⇐ 上に凸なグラフで、２次関数と x 軸とが接するとき)



(vi) $a < 0,\ D > 0$ のとき (⇐ 上に凸なグラフで、２次関数と x 軸とが２点で交わるとき)



では、これらを踏まえて問題に戻ります。少し間が空いたのでもう一度問題をかいておきます。

問題

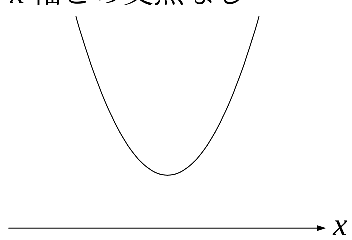
すべての x に対して、$x^2 + ax + a + 3 > 0$ の不等式が常に成り立つような、定数 a の値の範囲を求めよ。

【解説】

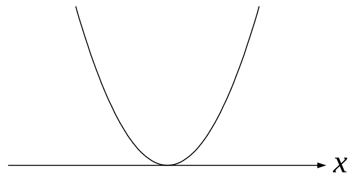
この問題なんですが、先ほどと同じように考えれば $y = x^2 + ax + a + 3$ と $y = 0$ の２つのグラフをかいたとき $y = x^2 + ax + a + 3$ のグラフの方が $y = 0$ のグラフより常に上側にあったらいいんだよね？

$y = x^2 + ax + 3$ のグラフは下に凸な２次関数です。下に凸な２次関数は x 軸との位置関係で考えると次の３パターンに分かることができます。

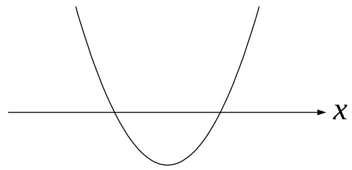
(i) x 軸との交点なし



(ii) x 軸と接する



(iii) x 軸と 2 点で交わる



この 3 つの中から、$y = 0$ つまり x 軸より常に上側となるのは、上記の (i) のパターンじゃないかな？で、(i) のとき、x 軸と放物線の交点がない時だから、判別式を D とすると $D < 0$ となります。それでは、解答に進みます。

【解答】
$x^2 + ax + a + 3 > 0$ がすべての x において成立するには、$x^2 + ax + a + 3 = 0$ の判別式を D とすると $D < 0$ であればよい。

$$D = a^2 - 4(a + 3) < 0$$
$$a^2 - 4a - 12 < 0$$
$$(a + 2)(a - 6) < 0$$
$$\therefore\ -2 < a < 6$$ ◀ これが答え

では、これと同じような問題をもう一問解いてもらいます。

問題

すべての実数 x に対して、不等式 $ax^2 - 2ax + 3 > 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

【解説】
この問題も、さっきの問題と同じように考えていったらいいんだけど、さっきの問題は $x^2 + ax + a + 3 > 0$ で x^2 の係数が 1 で正でした。ということは下に凸な 2 次関数です。

でも、今回は $ax^2-2ax+3<0$ と x^2 の係数が文字でよく分かりません。ですから、x^2 の正負から考えていかないといけないんだけど…

その前に、この問題は注意しないといけないことがあります。もし仮に $a=0$ だとしたら、$ax^2-2ax+3$ に $a=0$ を代入すると x^2 の係数が消えるので２次式ではなくなるよね？

判別式を使って解いていきたんだけど、判別式を使えるのは２次方程式のときのみです。x^2 の係数がなくなったときは判別式は使えません。こういったときは場合分けをして考える必要があります。

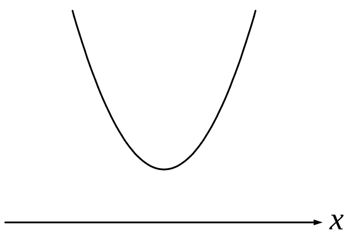
２次方程式で x^2 の係数が文字のときは注意するようにしてください。

で、実際に $a=0$ を $ax^2-2ax+3>0$ に代入してみると $3>0$ となります。$3>0$ という式には x の値にかかわらず成立します。よって、$a=0$ のとき成立します。。

$a=0$ のときを考えたので、次に $a \fallingdotseq 0$ のときについて考えます。これは２次式となるので２次関数と x 軸との位置関係で考えていくことができます。

今回は常に $ax^2-2ax+3>0$ なんだけど、これはどういうことかと言えば $y=ax^2-2ax+3$ が常に x 軸よりも上側にあるときだよね？

そこで、さっき話した２次関数と x 軸との位置関係の６パターンを見てほしいんだけど、２次関数が常に x 軸よりも上側にあるのは、(i) のときだよね。



上記のようなとき、２次関数は常に x 軸より下側にある。これらのことを踏まえて、解答に進みます。

【解答】

(i) $a=0$ のとき
$ax^2-2ax+3>0$ に $a=0$ を代入すると $3>0$ となり、適する。

(ii) $a \fallingdotseq 0$ のとき
$ax^2 - 2ax + 3 = 0$ の判別式を D とすると、題意を満たすには $a > 0$ かつ $D < 0$ であればよい。

$$D/4 = a^2 - 3a < 0$$
$$a(a-3) < 0$$
$$0 < a < 3$$

以上より、$0 \leqq a < 3$ ◀ これが答え

今回の解説プリントはこれで終わりです。どうだったでしょうか？こういったところを苦手にしている人も多いと思います。しっかりと理解しておいてください。。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com