# 2次関数No1.「対称移動」

今回から数回にわたって2次関数の基本的な問題をすべて解説していきます。2次関数は、高校数学の関数分野の基礎となるところです。

今後、三角関数、指数対数、微分積分など、関数の知識が必要な単元を勉強しないといけませんが、これらの単元の基礎は2次関数です。2次関数が理解できているかどうかで、今後の理解度がまったく違ってきます。2次関数はそれくらい重要な単元ですので、簡単だからと手を抜かずにしっかりと勉強して下さい。

この2次関数のシリーズでは基本的な問題を中心に解説する予定ですが、とりあえずはこのシリーズをすべて理解してもらえば2次関数は大丈夫だと思います。

今回のテーマは、「対称移動」です。対称移動についてはまず次のことを覚えてください。

対称移動

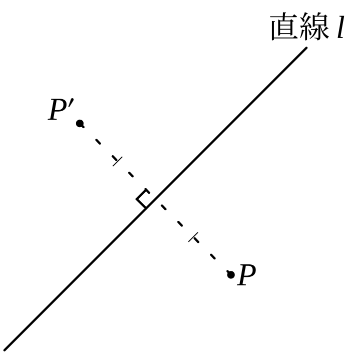
① $x$ 軸対称： $y = f(x) \rightarrow -y = f(x)$

② $y$ 軸対称： $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$

③ 原点対称： $y = f(x) \rightarrow -y = f(-x)$

（注）これは覚えるんじゃなくて、グラフを使ったら簡単に導けると思うのでまず最初は導き方を覚えてください。対称移動は、しょっちゅう問題にでてくるので最終的には覚えてしまうと思いますが、最初のうちは問題が出題されるたびに自分で導くようにしてください。

まずは対称点の求め方から説明します。




左図を見てください。左図は点 $P$ を直線 $l$ について対称移動した点を $P'$ としています。

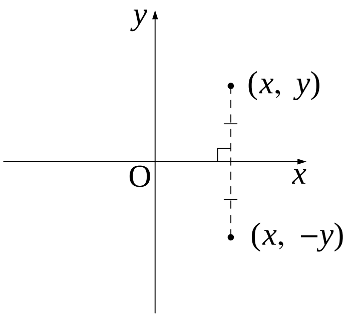
直線 $l$ について対称とは、点 $P$ を直線 $l$ を折り目にして折り返したとき移る点 $P'$ のことをいいます。左図を見ればわかると思いますが、$P$ から直線 $l$ までの距離と $P'$ から直線 $l$ までの距離は等しくなります。

また、$PP'$ と直線 $l$ は直交します。

ちなみに数学 II の、図形と式の単元で対称点を求める問題がありますが、この問題はこの知識を使ってといていきます。

対称移動については、このくらいのことを覚えておいてもらえば十分です。

対称移動の説明はこのくらいにして、なぜ $x$ 軸対称が $-y = f(x)$ になるのか説明します。これまでの話だけでもう導けるという人も多いと思いますが、とりあえず説明します。




$x$ 軸対称とは、$x$ 軸について折り返した点。上図を見てもらえば分かると思うけど、当然 $x$ 座標に変化なし。$y$ 座標は $x$ 軸について折り返したんだから $-y$ になります。

$x$ 軸対称では $(x, y)$ という点は $(x, -y)$ になるので $y = f(x)$ を $x$ 軸対称すると $-y = f(x)$ となります。$y$ 軸対称、原点対称についても同様に導けるので自分でしっかりと確認しておいてください。

では、対称移動の問題に進みます。

**問題**

放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ を次の直線または点に関して対称移動したグラフの方程式を求めよ。

(1) $x$ 軸対称　　(2) $y$ 軸対称

(3) 原点対称　　(4) $x = 3$ について対称

【解説】(1), (2), (3) については公式を代入するだけです。(4) の $x = 3$ について対称は少し難しいかもしれませんが、対称点の図を使って導く方法をしっかりと理解できていたら、それほど難しいものではないと思います。

【解答】

(1) $y = x^2 - 4x + 5$ を $x$ 軸対称すると

$-y = x^2 - 4x + 5$ ◀ $x$ 軸対称は $-y = f(x)$ より

$y = -x^2 + 4x - 5$ ◀ これが答え

(2) $y = x^2 - 4x + 5$ を $y$ 軸対称すると

$y = (-x)^2 - 4(-x) + 5$ ◀ $y$ 軸対称は $y = f(-x)$ より、$x$ のところに $-x$ を代入したと考える

$= x^2 + 4x + 5$ ◀ これが答え

(3) $y = x^2 - 4x + 5$ を原点対称すると

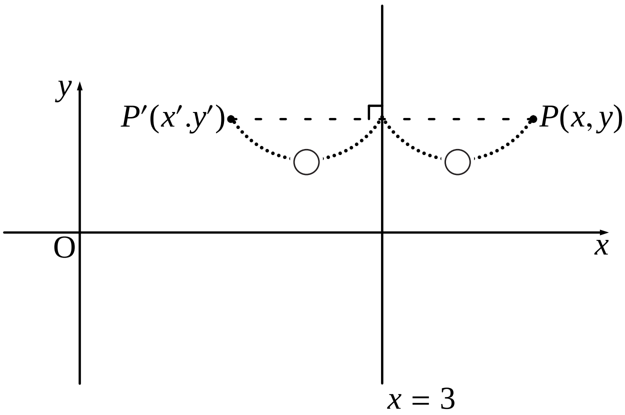
$-y = (-x)^2 - 4(-x) + 5$

↑ 原点対象は $-y = f(-x)$ より、$x$ のところに $-x$、$y$ のところに $-y$ を代入したと考える

$y = -x^2 - 4x - 5$ ◀ これが答え

(4)

【解説】




$x = 3$ について対称っていうのは上図のようになるのは分かるよね。

$P(x,y)$ を $x = 3$ について対称移動したとき $P'(x',y')$ になるとします。図から分かるように当然 $y$ 座標は同じだよね。よって $y = y'$。後は $x'$ を求めたら終わりだよね。

対称の性質より、点 $P$ から $x = 3$ までの距離と $x = 3$ から $P'$ までの距離は等しくなります。$P$ から $x = 3$ までの距離は上図でいえば○の長さは $x - 3$ となります。

$P'$ の $x$ 座標 $x'$ は $P$ の $x$ 座標より、$2 \times$ ○だけ小さいので $x' = x - 2(x - 3) = -x + 6$ となります。

【解答】
$(x, y)$ を $x = 3$ について対称移動すると $(-x+6, y)$ となるので

$y = x^2 - 4x + 5$ を $x = 3$ について対称移動すると

$y = (-x+6)^2 - 4(-x+6) + 5$ ◀ $x$ に $-x+6$ を代入したと考える
$\quad = x^2 - 12x + 36 + 4x - 24 + 5$
$\quad = x^2 - 8x + 17$ ◀ これが答え

今回は、これで終了です。最初にも話しましたが 2 次関数は高校数学の基礎となるところです。あえて簡単な問題を使って解説しますが、簡単だからと言って手を抜かないようにしてください。

次回は、平行移動に関する問題を解説します。

河見賢司

少し難しくなると解けなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com