2次関数No1.「対称移動」

今回から数回にわたって２次関数の基本的な問題をすべて解説していきます。２次関数は、高校数学の関数分野の基礎となるところです。

今後、三角関数、指数対数、微分積分など、関数の知識が必要な単元を勉強しないといけませんが、これらの単元の基礎は２次関数です。２次関数が理解できているかどうかで、今後の理解度がまったく違ってきます。２次関数はそれくらい重要な単元ですので、簡単だからと手を抜かずにしっかりと勉強して下さい。

この２次関数のシリーズでは基本的な問題を中心に解説する予定ですが、とりあえずはこのシリーズをすべて理解してもらえば２次関数は大丈夫だと思います。

今回のテーマは、「対称移動」です。対称移動についてはまず次のことを覚えてください。

対称移動

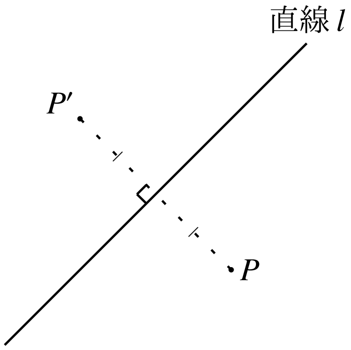
① x 軸対称：　$y = f(x) \rightarrow -y = f(x)$

② y 軸対称：　$y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$

③ 原点対称：　$y = f(x) \rightarrow -y = f(-x)$

（注）これは、以下の図より簡単に導けると思います。

まずは対称点の求め方から説明します。



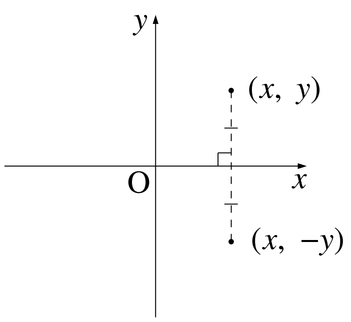
左図を見てください。左図は点 P を直線 l に関して対称移動した点を P' としています。

直線 l に関して対称とは、点 P を直線 l を折り目にして折り返したとき移る点 P' のことをいいます。左図を見ればわかると思いますが、P から直線 l までの距離と P' から直線 l までの距離は等しくなります。また、PP' と直線 l は直交します。

ちなみに数学 II の、図形と式の単元で対称点を求める問題がありますが、この問題はこの知識を使ってといていきます。

対称移動については、このくらいのことを覚えておいてもらえば十分です。

対称移動の説明はこのくらいにして、なぜ x 軸対称が $-y = f(x)$ になるのか説明します。これまでの話だけでもう導けるという人も多いと思いますが、とりあえず説明します。



x 軸対称とは、x 軸について折り返した点。上図を見てもらえば分かると思うけど、当然 x 座標に変化なし。y 座標は x 軸について折り返したんだから $-y$ になります。

x 軸対称では (x, y) という点は $(x, -y)$ になるので $y = f(x)$ を x 軸対称すると $-y = f(x)$ となります。y 軸対称、原点対称についても同様に導けるので自分でしっかりと確認しておいてください。

【注】上記の説明について

上記の説明ですが、本来の数学で言えば正しくありません。ただ、上記のように覚えて

おいてもらえれば対称移動は解けてしまいます。また、このように話している参考書が多いので、あえて（多少不正確な部分はあるが）分かりやすい説明をしています。

数学の興味のある人だけ、以下の説明をみてください。

まず、点 (x, y) を x 軸に関して対称移動して点を (X, Y) とします。

そうすると、$x = X,\ \ y = -Y$ が成立するんだよね。

で、点 (x, y) は曲線 $y = f(x)$ 上の点だから $y = f(x)$ が成立します (⇐ 同じ x, y を使ったので少し混同するかもしれません。例えば、点 (a, b) が曲線 $y = f(x)$ 上にあるとき、$b = f(a)$ が成立するんだよね。それと同じです。点 (x, y) が曲線 $y = f(x)$ 上にあるとき、$y = f(x)$ が言えます。同じ、x, y を使っているので難しく感じるかもしれません $\cdots$)

$x = X, y = -Y$ を $y = f(x)$ に代入すると、$-Y = f(X)$ です。つまり、$Y = -f(X)$ です。

ということは、曲線 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動した曲線の方程式は $y = f(-x)$ です。

＊「$Y = -f(X)$ から、なぜ $y = -f(x)$ としていいの？」
例えば、$y = -f(x)$ 上に点 (X, Y) があるとき $Y = -f(X)$ が成立するよね。

で、これを逆から考えます。点 $Y = -f(X)$ が成立しているということは点 (X, Y) が曲線 $y = -f(x)$ 上にあるということですよ。

以上より、曲線 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動した曲線の方程式は $y = -f(x)$ となります。

しっかりと考えたら上記のようになります。「ややこしい $\cdots$ 」と思う人は、理解しなくて先ほど赤枠でまとめたものを公式として適用したらいいですよ。それで解けます。時間が経つと、徐々に分かってくると思いますよ。では、対称移動の問題に進みます。

問題

放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ を次の直線または点に関して対称移動したグラフの方程式を求めよ。

(1) x 軸対称　　(2) y 軸対称

(3) 原点対称　　(4) 直線 $x = 3$ に関して対称

【解説】

(1), (2), (3) については公式を代入するだけです。(4) の $x = 3$ について対称は少し難しいかもしれませんが、対称点の図を使って導く方法をしっかりと理解できていたら、それほど難しいものではないと思います。

【解答】

(1) $y = x^2 - 4x + 5$ を x 軸対称すると

$-y = x^2 - 4x + 5$ ◀ x 軸対称は $-y = f(x)$ より
$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x - 5}$ ◀ これが答え

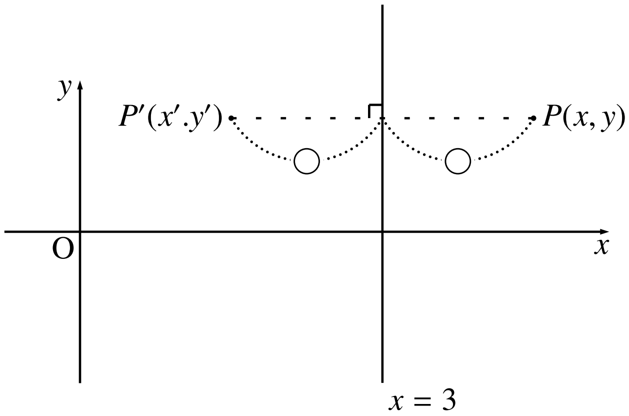
(2) $y = x^2 - 4x + 5$ を y 軸対称すると

$y = (-x)^2 - 4(-x) + 5$ ◀ y 軸対称は $y = f(-x)$ より、x のところを $-x$ で置き換えた！
$= \boldsymbol{x^2 + 4x + 5}$ ◀ これが答え

(3) $y = x^2 - 4x + 5$ を原点対称すると

$-y = (-x)^2 - 4(-x) + 5$
↑ 原点対象は $-y = f(-x)$ より、x のところを $-x$、y のところを $-y$ で置き換えた！
$\boldsymbol{y = -x^2 - 4x - 5}$ ◀ これが答え

【（４）の解説】



$x=3$ に関して対称っていうのは上図のようになるのは分かるよね。

$P(x,y)$ を $x=3$ に関して対称移動した点んを $P'(X,Y)$ とします。図から分かるように当然 y 座標は同じだよね。よって $y=Y$。後は X を求めていきます。。

対称の性質より、点 P から $x=3$ までの距離と $x=3$ から P' までの距離は等しくなります。x と X の真ん中の値、つまり x と X の平均値が３と等しくなるってことだよね。

だから、$\dfrac{x+X}{2}=3$ となり、$x=6-X$ です。

【（４）の解答】

(x,y) を $x=3$ に関して対称移動した点を (X,Y) とする。

$y=Y$、$\dfrac{x+X}{2}=3$ つまり $x=6-X$ となる。

$y=x^2-4x+5$ に $x=6-X, y=Y$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
Y &= (-X+6)^2-4(-X+6)+5\\
&= X^2-12X+36+4X-24+5\\
&= X^2-8X+17
\end{aligned}
$$

よって、グラフの方程式は $\boldsymbol{y=x^2-8x+17}$ である。

＊ $Y=f(X)$ のとき、$y=f(x)$ となります。最終的に X を x に、Y を y にしたものが答え

になりますよ。

今回は、これで終了です。最初にも話しましたが２次関数は高校数学の基礎となるところです。あえて簡単な問題を使って解説しますが、簡単だからと言って手を抜かないようにしてください。

次回は、平行移動に関する問題を解説します。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」→「入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司