

対称式

対称式と聞くと、「対称式？あー $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ みたいな式ね」なんて言って対称式のことを適当にしか理解していない人が多いですが、対称式は本当に重要です。

対称式はそれ自身独立して出題されることは入試問題ではあまりありません。他の単元で、出題された問題で式変形をするときに使うことが多いです。特に、文字の置き換えでは、対称式の知識が必要なことが多いです。(数学では、最初の式変形が思いつけるかどうかのところが一番難しいです。最初の式変形さえ思いつくことができたら、残りはラクに問題を解けることが多いです。対称式を使うことが分かっていたら、最初の式変形をすんなりと思いつけます。それだけ、対称式は重要です。)

今回は対称式の問題と、対称式の知識が他の単元でどういうふうに必要なか、いくつかの問題を使って解説していきます。それらの問題で、対称式の重要性を認識してください。

では、がんばって対称式の問題を解いていきましょう。

対称式のことをまったく知らないという人は次のことを覚えてください。

対称式

対称式とは、 $x^2 + y^2, x^3 + y^3, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3$ のように文字を入れ替えても元の式と同じになる式のこと！

次に対称式の重要な性質を覚えてください。

対称式の性質

すべての対称式は、式変形をすることにより基本対称式のみを使ってあらわすことができる！基本対称式とは、2文字の対称式の場合 $x + y, xy$ 。3文字の対称式の場合 $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$

対称式の性質で説明したようにどういった対称式でも、基本対称式のみで表すことができます。このことから、対称式の問題がでてきたときは、まず対称式を基本対称式のみで表すことが基本です。

文章だけではよく分からないと思うので、対称式を基本対称式のみで表したいと思います。

まずは2文字の対称式のみを説明します。3文字の対称式については後ほど解説します。 $x^2 + y^2$ を基本対称式のみで表したいと思います。

$x^2 + y^2$ は $(x + y)^2$ を式変形して求めていきます。

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

よって $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ◀ 基本対称式 $x + y, xy$ のみで表すことができた！

次に $x^3 + y^3$ を基本対称式のみで表します。

$x^3 + y^3$ は $x^2 + y^2$ で $(x + y)^2$ を使ったのと同じように $(x + y)^3$ を使って基本対称式のみで式変形します。

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ ◀ 基本対称式 $x + y, xy$ のみで表すことができた！

このようにして対称式を基本対称式のみで表します。

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ と $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ は導き方と同時に結果も暗記してください。

覚えるべき対称式

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

対称式は他にも $x^4 + y^4, x^5 + y^5, \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ のようにたくさんありますが、 $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ 以外の対称式は $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ の結果を使って求めていきます。

$x^4 + y^4$ をよく $(x + y)^4$ を展開して求めようとする人がいます。もちろんこれでできないことはありませんがですが時間がかかってしまいます。

ちなみに $x^4 + y^4$ は $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2$ を使って基本対称式のみで式変形をします。

問題

次の対称式を基本対称式 $x + y, xy$ のみであらわせ

(1) $x^2 + y^2$

(2) $x^3 + y^3$

(3) $x^4 + y^4$

(4) $x^5 + y^5$

(5) $2x^2 + 3xy + 2y^2 + 2yx$

(6) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

(7) $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}$

【(1) (2) の解説】

これは先ほど覚えてもらった覚えるべき対称式です。答えだけ書いておきます。もちろんすでに解説したように導き方も覚えておいて下さい。

【(1) (2) の解答】

(1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ◀ 基本対称式 $x + y, xy$ のみで表わした

(2) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ ◀ 基本対称式 $x + y, xy$ のみで表わした

【(3) (4) の解説】

(3) (4) のように次数が 4 次以上の対称式では、

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

の式を使って強引に式変形することで、基本対称式のみで式変形をします。

(3) の $x^4 + y^4$ は $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2$ として計算し

(4) の $x^5 + y^5$ はとりあえず $x^5 + y^5$ を出すために $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$ を計算します。

【(3) の解答】

$$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \text{ ◀ } x^2 \text{ と } y^2 \text{ の対称式}$$

$$= (x^2 + y^2) - 2x^2y^2 \text{ ◀ 対称式の公式 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ に } a = x^2, b = y^2 \text{ を代入}$$

$$= \{(x + y)^2 - 2xy\} - 2(xy)^2 \text{ ◀ 基本対称式 } x + y, xy \text{ のみで表わした}$$

【(4) の解答】

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + x^2y^3 + y^2x^3 + y^5$$

↑ よくわからないけど $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ を使って $x^5 + y^5$ を出すために

とりあえず $(x^2 + y^2)(x^5 + y^5)$ をした

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^3 - y^2x^3$$

$$= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$$

$$= \{(x + y)^2 - 2xy\}\{(x + y)^3 - 3xy(x + y)\} - (xy)^2(x + y) \text{ ◀ 基本対称式 } x + y, xy \text{ のみで表わした}$$

【(5) の解説】

これは単に計算をするだけです。

【(5) の解答】

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 3xy + 2y^2 + 2yx \\ &= 2(x^2 + y^2) + 5xy \\ &= 2\{(x + y)^2 - 2xy\} + 5xy \\ &= 2(x + y)^2 - 4xy + 5xy \\ &= 2(x + y)^2 + xy \quad \leftarrow \text{基本対称式 } x + y, xy \text{ のみで表わした} \end{aligned}$$

【(6) の解説】

分数の対称式はほとんどの場合最初の式変形は通分です。覚えておいてください。

【(6) の解答】

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{y^2}{xy} + \frac{x^2}{xy} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ &= \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} \quad \leftarrow \text{基本対称式 } x + y, xy \text{ のみで表わした} \end{aligned}$$

【(7) の解説】

(7) も (6) と同じように分数の対称式なので、とりあえず通分します。

【(7) の解答】

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} &= \frac{y^3}{x^2y^2} + \frac{x^3}{x^2y^2} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\ &= \frac{x^3 + y^3}{x^2y^2} \\ &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(xy)^2} \quad \leftarrow \text{基本対称式 } x + y, xy \text{ のみで表わした} \end{aligned}$$

問題では、練習のためかなりややこしい対称式まで扱いました。通常、ここまでややこしいのはあまりでてきません(もちろんでてくる場合もありますが)。

対称式で覚えておいて欲しいことは、 $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ 以外の対称式は $x^2 + y^2, x^3 + y^3$ の対称式を使って基本対称式に変形する。

そして、もうひとつは分数の対称式はとりあえず通分してから計算するとうまくいくことが多いということも覚えておいてください。問題では(6)(7)です。

対称式の問題に関わらず、分数式が出題されたときは、とりあえず通分してみることが多いということを重ねて覚えておいてください。

では、問題に進みます。

問題 1

$x = 1 - \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$

(2) $x^3 + y^3$

(3) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

【解説】

対称式の問題だからとりあえずすべての対称式を基本対称式を使って表すんだけど、今回の問題では基本対称式 $x + y, xy$ の値が与えられていない！だから、まず基本対称式の値を求めてから問題を解いていくことにします。

問題を解く前に次のことを覚えておいて下さい。

対称式の問題

対称式の問題で、基本対称式の値が与えられていないときは何よりもまず基本対称式の値を求めるようにする。

基本対称式の値は、与えられた条件から求めることができます（そうでないと対称式の問題は解けません）。

(注) ごく一部の問題で基本対称式の値を求められないときがありますが、そんなときはうまく打ち消しあって基本対称式の値がなくても求められるようになっています（今回のプリントでは練習9）。基本対称式の値を与えられた条件式で求められないときは打ち消しあってくれると考えてもらっていいです。

【解答】

$$\begin{aligned} x + y &= 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

* 対称式の問題だけど基本対称式 $x + y, xy$ の値が求められていないので、とりあえず基本対称式 $x + y, xy$ の値をまず求めた。対称式の問題で基本対称式が与えられていないときはまず基本対称式の値を求めてから問題を解いていく

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 2^2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &= 8 + 6 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{y^2}{xy} + \frac{x^2}{xy} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\
&= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\
&= \frac{6}{-1} \quad \leftarrow (1) \text{の } x^2 + y^2 = 6 \text{ と } xy = -1 \text{ を代入した} \\
&= -6
\end{aligned}$$

練習 1

$x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, y = 2 - \sqrt{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$

(2) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

問題 2

$a + b = 6, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $a^2 + b^2$

(2) $\frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b}$

【解説】

対称式の問題で基本対称式の値が与えられていないときは、何よりもまず基本対称式の値を求めから問題を解いていくのが対称式の問題での基本だったよね。

今回の問題では $a + b$ の値は与えられているが、もうひとつの基本対称式 ab の値が与えられていない。そこでまだ使っていない条件式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ を使って、もうひとつの基本対称式 ab の値を求めてから問題を解いていきます。

少し細かいことですが、数学というものは与えられた条件式はすべて使います。今回の問題は、 $a + b = 6$ という条件式は使いましたが、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ という条件式をまだ使っていません。ということは、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ を使うはずですよ。

くどいようですが、数学は与えられた条件式はすべて使います。逆から言えば、与えられた条件式をすべて使い切らない状態で問題が解けたならそれは間違っている可能性が高いです。少し細かいことですが、本当に重要ですよ覚えておいて下さい。

余談ですが数学のできる人は、本人が自覚しているか否かは別にして、上記のようなことを何気なく確認しながら解いています。数学のできない人は、私もそうでしたがこういったことを何も考えずに解いています。それでは、いくら問題を解いてもできるようにはなりません。

数学のセンスのある人は何気なくでもできるようになりますが、センスのない人はいちいち覚えていくしかありません。今後、私が授業をしていくうえで、こういった数学的な考え方をくどいくらい、いちいち説明します。何度も言うのでうざったく思うかもしれませんが、我慢して聞いてください。そうすれば、かならず数学の得意な人と同じような思考回路で考えられるようになってきます。

【解答】

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$$

$$\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = 2 \quad \blacktriangleleft \text{分数の対称式はとりあえず通分}$$

$$\frac{a+b}{ab} = 2$$

$$a+b = 2ab \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } ab \text{ をかけて分数を払った}$$

$$6 = 2ab \quad \blacktriangleleft a+b=6 \text{ を代入}$$

$$ab = 3 \quad \blacktriangleleft \text{基本対称式 } ab \text{ の値が求まった}$$

$$(1) \quad a^2 + b^2$$

$$= (a+b)^2 - 2ab \quad \blacktriangleleft \text{対称式の公式より}$$

$$= 6^2 - 2 \times 3$$

$$= 36 - 6$$

$$= 30$$

$$(2) \quad \frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{b}$$

$$= \frac{b^3 \cdot b}{ab} + \frac{a^3 \cdot a}{ab} \quad \blacktriangleleft \text{分数の対称式はとりあえず通分}$$

$$= \frac{b^4}{ab} + \frac{a^4}{ab}$$

$$= \frac{a^4 + b^4}{ab}$$

$$= \frac{(a^2)^2 + (b^2)^2}{ab} \quad \blacktriangleleft a^2 \text{ と } b^2 \text{ の対称式}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2}{ab} \quad \blacktriangleleft x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{ の式に } x = a^2, y = b^2 \text{ を代入した}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2}{ab}$$

$$= \frac{30^2 - 2 \cdot 9}{3} \quad \blacktriangleleft (1) \text{ の } a^2 + b^2 = 30 \text{ と } ab = 3 \text{ を代入}$$

$$= 10 \times 30 - 2 \times 3$$

$$= 300 - 6$$

$$= 294$$

練習 2

$ab = 1, \frac{a+b}{ab} = 3$ のとき, 次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad a^3 + b^3$$

$$(2) \quad \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$$

問題 3 に進む前に整数部分、小数部分の話をしてします。

たとえば 2.45 という数字は $2.45 = 2 + 0.45$ というふうに整数 + 小数の形で表すことができます。このとき整数を整数部分、小数を小数部分といいます。2.45 では、整数部分が 2 で、小数部分は 0.45 です。

整数部分と小数部分

(実数) = (整数部分) + (小数部分) と表されることから、

(小数部分) = (実数) - (整数部分) である！

上記のことを頭にいれて、次の補題をやってみましょう。

補題

(1) π

(2) $\sqrt{2}$

(3) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

【解説】

小数部分は、(小数部分) = (実数) - (整数部分) で求められます。整数部分をまず考えて、実数からひけばいいだけです。

【解答】

(1)

$\pi \approx 3.14$ より π の整数部分は 3、よって π の小数部分は $\pi - 3$

(2)

$\sqrt{2} \approx 1.41$ より $\sqrt{2}$ の整数部分は 1、よって $\sqrt{2}$ の整数部分は $\sqrt{2} - 1$

$\sqrt{2} \approx 1.41$
 $\sqrt{3} \approx 1.73$

← これは覚えてね

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{分母にルートがあるときはとりあえず有理化} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} \\ &= \sqrt{2} - 1 \\ &\approx 1.41 - 1 \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

$\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ の整数部分は 0、よって小数部分は $\sqrt{2} - 1$

問題 3

$1 + \sqrt{3}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $a^2 + b^2$ の値を求めなさい。

【解説】

この問題は、整数部分小数部分の問題と対称式の融合問題です。対称式の問題ですので当然基本対称式の値を求めてから問題を解いていきます。

【解答】

$$1 + \sqrt{3} \approx 1 + 1.73 = 2.73$$

$$\text{よって } 1 + \sqrt{3} \text{ の整数部分 } a = 2、\text{ 小数部分 } b = 1 + \sqrt{3} - 2 = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{ここで } a + b = 2 + (-1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}, ab = 2(-1 + \sqrt{3}) = -2 + 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 - 2(-2 + 2\sqrt{3}) \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 4 - 4\sqrt{3} \\ &= 8 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

練習 3

$\sqrt{3}$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。このとき $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ の値を求めよ。

問題 4

実数 a, b が $\begin{cases} a^2 + \sqrt{3}b = \sqrt{2} \\ b^2 + \sqrt{3}a = \sqrt{2} \end{cases}$ を満たしているとき、 $a^2 + b^2$ の値を求めよ。ただし $a \neq b$

【解説】

この問題も対称式の問題なので、当然基本対称式をなによりもまず求めないといけない。そこで与えられた条件式 $\begin{cases} a^2 + \sqrt{3}b = \sqrt{2} \\ b^2 + \sqrt{3}a = \sqrt{2} \end{cases}$ から基本対称式を求めていったらいいんだけど、よく分からないよね。そこで次のことを覚えておいてください。

似ている式の扱い方

似ている式がふたつ与えられた時、とりあえずその2式を足したり引いたりしたら、ほとんどの場合うまくいく！

似ている式だから、よく分からないけどとりあえず足してみます。

$$\begin{cases} a^2 + \sqrt{3}b = \sqrt{2} \cdots \text{①} \\ b^2 + \sqrt{3}a = \sqrt{2} \cdots \text{②} \end{cases}$$

① + ② $\Rightarrow a^2 + b^2 + \sqrt{3}(a + b) = 2\sqrt{2}$ とりあえずたしてみたらこうなったけど、この数式からは何も情報を得られそうにない…(対称式の問題なので基本対称式の値を求めることが目的です。でも、この数式からはどう考えても基本対称式の値は求まりそうにない)

いま足してみてもダメだったので、引いてみることにします。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow a^2 - b^2 + \sqrt{3}(b - a) = 0$$

$$(a + b)(a - b) - \sqrt{3}(a - b) = 0$$

$a \neq b$ より両辺を $a - b$ で割ると

$$(a + b) - \sqrt{3} = 0$$

$$a + b = \sqrt{3}$$

とりあえず $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ をしたら $a + b$ の値が求まりました。残りは ab を求めたいんだけど ab は $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ の条件式から求めることができます。

似ている式は足したり引いたりしたらうまくいく。少し適当な表現ですが、意外によく出てきます。よく覚えておいて下さい。では、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{cases} a^2 + \sqrt{3}b = \sqrt{2} \cdots \textcircled{1} \\ b^2 + \sqrt{3}a = \sqrt{2} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow a^2 - b^2 + \sqrt{3}(b - a) = 0$$

$$(a + b)(a - b) - \sqrt{3}(a - b) = 0$$

$a \neq b$ より両辺を $a - b$ で割ると ◀(注)

$$(a + b) - \sqrt{3} = 0$$

$$a + b = \sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + \sqrt{3}(a + b) = 2\sqrt{2}$$

$$(a + b)^2 - 2ab + \sqrt{3}(a + b) = 2\sqrt{2}$$

ここで $a + b = \sqrt{3}$ を代入して

$$\sqrt{3}^2 - 2ab + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$$

$$-2ab + 6 = 2\sqrt{2}$$

$$-2ab = -6 + 2\sqrt{2}$$

$$ab = 3 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\
&= (\sqrt{3})^2 - 2(3 - \sqrt{2}) \\
&= 3 - 6 + 2\sqrt{2} \\
&= -3 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(注) について

方程式の両辺を変数(文字を含んだ式)で割る時には、必ずその変数が0になるかどうか確認してから解くようにする。0で割ることなんてできないから、もしその変数が0になる可能性がある時は0になる場合と0にならない場合で場合分けをして解いていきます。意外に忘れやすいのでしっかりと覚えておいてください。

練習 4

$a^2 + 3b = b^2 + 3a = 8$ のとき、次の式の値を求めよ。ただし $a \neq b$ とする。

- (1) ab (2) $a + b$ (3) $a^2 + b^2$ (4) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

【ヒント】

$a^2 + 3b = b^2 + 3a = 8$ は $\begin{cases} a^2 + 3b = 8 \\ b^2 + 3a = 8 \end{cases}$ のことです。

次に交代式というものを解説します。交代式とは、簡単に言えば文字を入れ替えたときもとの式と符号が反対になるような式のことです。

交代式の例としては、 $a - b, a^3 - b^3$ などです。 $a - b$ の文字を入れ替えてみると $b - a = -(a - b)$ となり $a - b$ と符号が反対になっている。

交代式のことをダラダラ説明しても分からないと思うので、いきなり問題に入りたいと思います。

問題 5

$x - y = 2, xy = 1$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $x^2 + y^2$ (2) $x^3 - y^3$ (3) $x + y$

【解説 (1)(2) のみ】

まず (1)(2) について説明します。実は (1)(2) は、次のように式変形をすると対称式の問題として考えることができます。

問題 5'

$x + (-y) = 2, x(-y) = -1$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $x^2 + (-y)^2$ (2) $x^3 + (-y)^3$

このように式変形したら分かると思うけど、交代式は単なる対称式です。これまでの対称式は x と y の対称式でしたが、交代式では x と $-y$ の対称式になります。基本対称式は $x + (-y), x(-y)$ です。

【解答 (1)(2) のみ】

(1) $x^2 + y^2 = x^2 + (-y)^2$ ◀ x と $-y$ の対称式

$$= \{x + (-y)\}^2 - 2x(-y) \quad \leftarrow a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ に } a = x, b = -y \text{ を代入した}$$

$$= (x - y)^2 + 2xy$$

$$= 2^2 + 2 \times 1$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6$$

(2) $x^3 - y^3 = x^3 + (-y)^3$ ◀ x と $-y$ の対称式

$$= \{x + (-y)\}^3 - 3x(-y)\{x + (-y)\} \quad \leftarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ に } a = x, b = -y \text{ を代入した}$$

$$= (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$= 2^3 + 3 \times 1 \times 2$$

$$= 8 + 6$$

$$= 14$$

【解説 (3) のみ】

(3) は対称式の問題ではありません。でも対称式がらみの問題として今回の問題のように対称式の問題と同時に出題されることが多いです。

$x + y, xy$ の値が分かっているとき $x - y, xy$ の値を求めなさいという問題は頻出です。のちほど解説しますがこの問題は $x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x}$ という形で出題されることが多いです。

この類の問題が出題された時は次の式変形をします。式が成り立っていることはすぐに確認できるとは思いますが、意外によく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

重要な式変形

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

【解答 (3) のみ】

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \quad \leftarrow \text{上記の重要な式変形より}$$

$$= 2^2 + 4$$

$$= 8$$

$$\therefore x + y = \pm 2\sqrt{2}$$

練習 5

$x - y = 3, xy = 10$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^3 - y^3$

(2) $x + y$

(3) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

問題 6

$x + \frac{1}{x} = 3$ ($x > 1$) のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $x - \frac{1}{x}$

【解説】

問題 5 で、 $a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$ とすることにより a と $-b$ の対称式とみなすことができると説明しましたが、今回の問題でも $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ と変形することにより x と $\frac{1}{x}$ の対称式とみなすことができます。この場合基本対称式は $x + \frac{1}{x}$ と $x \frac{1}{x}$ ですが、 $x \frac{1}{x} = 1$ となるので、 x と $\frac{1}{x}$ の対称式は $x + \frac{1}{x}$ のみで表されます。

また、(3) の $x - \frac{1}{x}$ は対称式の問題ではありません。これは問題 5 の (3) と同じように解けばできます。

このタイプの問題は、本当によく出題されるので覚えておいて下さい。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \frac{1}{x} \quad \leftarrow a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ の式に } a = x, b = \frac{1}{x} \text{ を代入} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= 3^2 - 2 \\ &= 9 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \leftarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ の式に } a = x, b = \frac{1}{x} \text{ を代入} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 \\ &= 27 - 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$(3) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4x \frac{1}{x}$$

↑ 12 ページの重要な式変形 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ に $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ を代入

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \\ &= 3^2 - 4 \quad \leftarrow x + \frac{1}{x} = 3 \text{ を代入} \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$x - \frac{1}{x} > 0 \text{ より } *(\text{注})$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$

(注)

$x - \frac{1}{x} > 0$ なんていわれたら分かると思うけど、多くの人が気づかないと思います。私も多分高校生のときは気づかなかった … ここで、案外知られていませんが覚えておいてほしいことがあります。それは、高校数学において、解答はほとんどの場合ひとつのみということです。

今回は $\pm \sqrt{5}$ と答えがふたつ出てきましたが、答えがふたつ出るとはまれです。ということは、どちらか一方の答えが条件を満たしていない確率が高くなります。そういうことを、頭に入れてもう一度条件は何かないか、隠れた条件はないかと探してみるようにしておいてください。

もちろんふたつ以上の答えがでる場合もありますが、入試問題では圧倒的にひとつの解になることが多いです。どちらにせよ解答がふたつ以上でてきた場合には、もう一度条件を見直すようにしておいて下さい。

問題 7

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

(3) $x + \frac{1}{x}$

【解説】

この問題は問題 5 と問題 6 を理解しておけば簡単です。今までと同じように $x^3 - \frac{1}{x^3} = x^3 + \left(-\frac{1}{x}\right)^3$ と式変形すれば x と $-\frac{1}{x}$ の対称式とみなすことができます。(もうこの考え方はわかってきたよね?)

【解答】

$$\begin{aligned}(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= x^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \left\{x + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^2 - 2x\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \\ &= \sqrt{2^2} + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} &= x^3 + \left(-\frac{1}{x}\right)^3 \\ &= \left\{x + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^3 - 3x\left(-\frac{1}{x}\right)\left\{x + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= \sqrt{2^3} + 3\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \\ &= \sqrt{2^2} + 4 \\ &= 2 + 4 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{6}$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{6}$$

次に練習 6 の補題として、2 重根号を少し解説します。

2 重根号とは、 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ のように根号のなかにさらに根号が含まれている式です。

2 重根号は、場合によっては式変形をすることにより 1 重の根号にすることができます。もちろんすべての場合で 2 重根号を 1 重根号に変形することができるというわけではありませんが、2 重根号が出題された場合、まず間違いなく 1 重根号に変形することができます。

2重根号といえば、難しそうと思うかも知れませんが簡単です。根号は、中身が2乗のとき根号を外すことができます。

根号の外し方

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

このことを頭に入れて、2重根号 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ の中身の $a + \sqrt{b}$ が何らかの2乗で表されるなら、2重根号を外すことができます。

ここで簡単な問題をしてみます。

補題1

$5 + 2\sqrt{6}$ を $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ の形で表せ。

【解説】

まず右辺の $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ を式変形します。

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2 \\ &= a + \sqrt{ab} + b \\ &= a + b + 2\sqrt{ab} \end{aligned}$$

となります。 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ が左辺の $5 + 2\sqrt{6}$ と一致するので、 $a + b = 5, ab = 6$ の方程式を解けばいいわけです。 $a + b = 5, ab = 6$ をまじめに解いてもいいのですが、今回は因数分解と同じように足して5、掛けて6となるような2数を頭で考えましょう。当然 $a = 3, b = 2$ です (a, b は逆でもかまいません)。

【解答】 $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

今までのことを頭に入れて次の補題を解いていきます。ポイントとしては $\sqrt{\quad}$ の前の係数を2にすることです。

補題2

次の式の2重根号を外せ。

(1) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

(3) $\sqrt{10 + \sqrt{84}}$

(4) $\sqrt{11 - \sqrt{120}}$

(5) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

(6) $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$

【解答】

$$(1) \sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{9-2\sqrt{14}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

$$(3) \sqrt{10 + \sqrt{84}}$$

$$= \sqrt{10 + \sqrt{4 \cdot 21}}$$

$$= \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

$$(4) \sqrt{11 - \sqrt{120}}$$

$$= \sqrt{11 - \sqrt{4 \cdot 30}}$$

$$= \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$(5) \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2}(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$(6) \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6 + \sqrt{9 \cdot 3}}$$

$$= \sqrt{6 + \sqrt{27}}$$

$$= \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{27}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{9} + \sqrt{3})^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

問題 3、問題 6、問題 7、補題の練習問題として次の問題を解いてみてください。これまでのことを理解していれば簡単な問題です。

練習 6

$\sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$ の小数部分を a とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $a + \frac{1}{a}$

(2) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

(3) $a - \frac{1}{a}$

(4) $a^3 - \frac{1}{a^3}$

次に少し新しいタイプの問題です。最初のうちは少し考えにくい? というか忘れやすいですが、意外によく出題されます。よく覚えておいて下さい。

問題 8

$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$ ($x > 0$) のとき、 $x + \frac{1}{x}$ の値を求めよ。

【解説】

この問題は、今までの $x + \frac{1}{x}$ の値が分かっているとき $x^2 + \frac{1}{x^2}$ や $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値を求めよといった問題とは違います。

これまでは次数の低い $x + \frac{1}{x}$ の値が分かっていて、次数の高い $x^2 + \frac{1}{x^2}$ や $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値を求めよといった問題でしたが、今回はそれとはまったく反対で、次数の高い $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値が分かっていて、それよりも次数の低い $x + \frac{1}{x}$ の値を求めなさいという問題です。

こういった問題を始めてやる人の多くが、求めたい $x + \frac{1}{x}$ を 3 乗とかしてなんとか $x^3 + \frac{1}{x^3}$ で表そうとしますが、これでは少し難しいです。もちろんこの方法でも解けますが、もっと簡単な方法があります。

$x^3 + \frac{1}{x^3}$ をこれまでの対称式の知識を使い $x + \frac{1}{x}$ のみで表します。その式を $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$ に代入することで、与式は $x + \frac{1}{x}$ のみの式になるので、その式を方程式を解くようにすれば $x + \frac{1}{x}$ の値を求めることができます。

長々と説明しましたが、説明されても何のことが分からない人が多いと思います。実際解いてみますので、それを参考にしっかりと理解してください。

数学は問題にもよりますが、解答を見てすんなり理解できても実際自分で解いてみると解くことができない問題があります。この問題はその典型で、解答を見たら理解できたように感じますが、自分でやってみると解けない人が本当に多いです。受験時代の私がそうでした。「こんなの分かるぜ!」と思いつつ、自分で解いたらまるっきりできない… そんな状態でした。だから、どんな問題でも、簡単だからと飛ばすのではなく、自分で理解できたと思っても、実際に自分の手だけで解いてみるようにしてください。あっさり解けたらしっかりと理解できていますし、解けなかったら解けるようになるまで解きなおせばよいだけのことです。がんばってください。

【解答】

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$$

ここで $x + \frac{1}{x} = X$ ($X \geq 2$) とする。(*注1)

$$X^3 - 3X = 2$$

$$X^3 - 3X - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \quad (*注2)$$

$$(X+1)(X^2 - X - 2) = 0$$

$$(X+1)(X+1)(X-2) = 0$$

$$(X+1)^2(X-2) = 0$$

$$X \geq 2 \text{ より } X = 2$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 2$$

【注1】 $x + \frac{1}{x} = X \geq 2$ について

$x + \frac{1}{x}$ がなぜ ≥ 2 になるかについてはのちほど説明します。

文字の置き換えがいかにか重要かは今後数学の勉強を進めているうちに分かると思いますが、文字の置き換えの例題として次の問題をやってみます。

例題

$y = (x^2 - 2x - 1)^2 + 8(x^2 - 2x - 1) + 20$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

【解説】

この問題を何も考えずに解いてしまうと、 $(x^2 - 2x - 1)^2$ を展開なんかしてとやる人がいるけど $(x^2 - 2x - 1)^2$ を展開したら x の4乗が出てきて、式が4次関数になって考えにくい。そこで、与式が $(x^2 - 2x - 1)$ のみでできていることを考えて、 $X = x^2 - 2x - 1$ とでも置き換えると与式は $y = X^2 + 8X + 20$ となり単なる2次関数となり考えやすくなる。

このように最大・最小の問題では文字の置き換えによって考えやすくなることが多いです。

文字の置き換えは式が簡単になるので、よく使いますがひとつだけ注意しないといけないことがあります。

次に典型的な誤答例を書いてみます。

誤答例

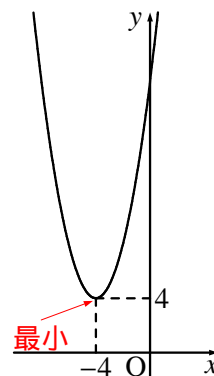
$$y = (x^2 - 2x - 1)^2 + 8(x^2 - 2x - 1) + 20$$

ここで $x^2 - 2x - 1 = X$ とする

$$y = X^2 + 8X + 20$$

$$= (X + 4)^2 + 4$$

グラフより $X = -4$ のとき、最小値 4 をとる



上記の解答はどこが間違っているか分かる？

$X = x^2 - 2x - 1$ と置き換えるまではそれでいいんだけど、上記の解答では置き換えたら絶対に考えないといけないことを忘れてる。まず置き換えについては次のことを覚えておいて下さい。

文字の置き換えについて

文字を置き換えたときは、
必ず置き換えた文字の範囲に注意する！

上記の例題でいうと $X = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$ と式変形できるわけだから、当然 X にも $X \geq -2$ という範囲がついてくるよね。

上記の誤答例では、文字を置き換えたにもかかわらず置き換えた文字の範囲に注意していなかったから間違ってしまった。こういうことを言うと、私はしっかりと考えているから大丈夫！なんていう人もいるけど、今回の場合分かりやすいから間違う人も少ないかもしれないけど、文字には隠れた範囲がついてくる場合があります。たとえば $\sin \theta = X$ は $-1 \leq X \leq 1$ という範囲がついてくるし、 $t = x^2 - 1$ と置き換えたなら $t \geq -1$ という範囲がついてきます（理由は各自考えてください）。

本当に重要だからもう一度言います。文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の範囲に注意する。一見範囲がなさそうでも、隠れた範囲がついてくる場合があるので、特に慣れるまではしっかり何度も何度も確認するようしておいて下さい。

【解答】

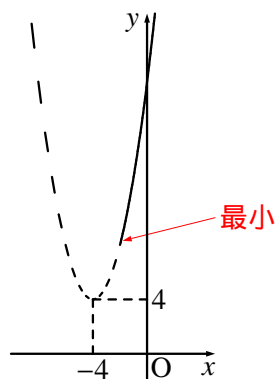
$x^2 - 2x - 1 = X$ とする。

$X = (x - 1)^2 - 2$ より $X \geq -2$

$$y = X^2 + 8X + 20$$

$$= (X + 4)^2 + 4$$

グラフより $X = -2$ のとき、最小値 8 をとる。



$$X = x^2 - 2x - 1 \text{ より}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -2 \leftarrow X = -2 \text{ に } x^2 - 2x - 1 = -2 \text{ を代入した}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

以上より、 $x = -1$ のとき最小値 8 をとる。

では、問題 8 に戻ります。

問題 8 では $x + \frac{1}{x} = X$ と文字を置き換えたんだから、当然文字の範囲を考えないといけません。そこで、相加・相乗平均という重要な事柄がでてきます。

相加・相乗平均については、今後また解説するので今回はとりあえず以下のことを覚えておいて下さい。

相加・相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき、 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ がいえる。
また等号が成立するのは $a = b$ のときである。

相加・相乗平均の証明

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ の証明

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= a + b - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

等号は $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ つまり $a = b$ のとき成立

相加・相乗平均は本当に重要です。実は、分数関数の最大・最小値の問題はほとんどの場合相加・相乗平均で求めることができます。今回は、相加・相乗平均がメインではないので、とりあえずは上記のことを覚えてもらえれば十分です。

問題 8 の $x + \frac{1}{x}$ は $x \geq 0$ という範囲があるので相加・相乗平均が使えます。相加・相乗平均が使えるのは正であるときということに注意してください。

$$x + \frac{1}{x}$$

相加・相乗平均より

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

【注2】

次に $X^3 - 3X - 2 = 0 \Rightarrow (X + 1)(X^2 - X - 2) = 0$ について説明します。

2次方程式でも3次方程式でも方程式を解くには、因数分解をすることが多いです。2次式の因数分解は因数分解の公式やたすきがけを利用して因数分解をすることができましたが、3次式以上の整式はこのようにしては因数分解できません。

そこで3次式以上の整式を因数分解するには、たすきがけという新しい知識が必要になります。

では、 $x^3 - 3x - 2 = 0 \cdots (*)$ を使って、たすきがけを説明していきます。一応説明はしますが、読んでもなかなか分からないと思います。とにかく下にあるたすきがけの練習問題を自分で実際に解いてみて、しっかりと理解してください。最初のうちは、「なんじゃそりゃ」みたいな感じで分かりにくいかもしれませんが、なれてくると本当に簡単です。

余談ですが、数学が難しいといっている生徒のほとんどがこういった計算ができません。どの単元でも計算は必要です。まずは不等式、相加・相乗平均、組み立て除法といった計算をしっかりと理解することが先決です。こういった計算ができるようになると、数学の勉強のペースが格段にあがります。「 \quad という単元が難しいんですけど…」なんていつてくる生徒がいますが、よくよく聞いてみるとただ単にこういった計算ができないだけという人が本当に多いです。メンドウですが、まずはこういった計算を完璧にすることが何よりの早道となります。がんばりましょう。

組み立て除法は、まず $(*)$ を満たす x をひとつみつけます。その x は必ず定数項の約数になります。今回の問題では定数項は -2 なので、 -2 の約数になります。

$(*)$ を満たす x は、しらみつぶしに定数項の約数を $(*)$ に代入していくしかありません。今回の場合定数項は -2 なので、まずは $+1$ を次に $-1, +2, -2$ を代入して探していきます。それでも見つからない場合 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ の順に代入して $(*)$ を満たす x をひとつ見つけ出します。

しらみつぶしといえばめんどくさそうですが、ほとんどの場合で $\pm 1, \pm 2$ くらいで見つかります。分数にまでいくことはほとんどありません。今回の場合 $x = -1$ が $(*)$ を満たします。

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

よって $x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

練習問題

次の数式を組み立て除法を使って因数分解せよ

(1) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

(2) $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

(3) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

【解答】

(1) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 8 & 4 \\ & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$= (x+2)(x^2 + 3x + 2)$
 $= (x+2)(x+2)(x+1)$
 $= (x+2)^2(x+1)$

(2) $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ & & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \diagdown \quad 1 \rightarrow 2 \\ 2 \quad \diagup \quad 1 \rightarrow 1 \\ \hline 2 \quad \quad \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

$= (x-1)(2x^2 + 3x + 1)$
 $= (x-1)(x+1)(2x+1)$

(3) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\ & & 2 & 2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$= (x-2)(x^3 + x^2 - 2)$
 $= (x-2)(x-1)(x^2 + 2x + 2)$

練習 7

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) xy

(2) $x+y$

(3) x^2+y^2

(4) x^4+y^4

【ヒント】この練習 7 は少し難しいかもしれませんが、最初は解けなくても大丈夫です。でも、重要な問題なので必ず理解してくださいね。ヒントとしては、 $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ 累乗根が含まれていると考えにくいので x, y とともに 3 乗して、累乗根をなくしてから考えます。

次に解と係数の関係に進みます。解と係数の関係は範囲としては数学 2 ですが対称式と関連が良いので、対称式との融合問題として出題されることが多いです。いい機会ですので、ついでに解と係数の関係も覚えておきましょう。

今回は、2 解の解と係数の関係のみを話します。解と係数の関係には 3 解のものもありますが、それはのちほど解説します。

解と係数の関係についてはまず次のことを覚えてください。

解と係数の関係 (2 解)

$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を $x = \alpha, \beta$ とする。

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ がいえる。}$$

解と係数の簡単な証明

$ax^2 + bx + c = 0$ が 2 解 α, β をもつので

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \text{ とおける} \quad \blacktriangleleft \text{ (注)}$$

$$= a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$$

$$= ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$$

両辺の係数を比較して

$$b = -a(\alpha + \beta) \rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$c = a\alpha\beta \quad \rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(注) について

$ax^2 + bx + c = 0$ の解が $x = \alpha, \beta$ のときなぜ $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ になるか分からない人が多いので簡単に説明します。

例えば $(x - 2)(x - 3) = 0$ の方程式を解いてって言われたら、解は $x = 2, 3$ だよ。逆から言えば $x = 2, 3$ を解にもつ 2 次方程式は $(x - 2)(x - 3) = 0$ になるよね。

それから $2(x-2)(x-3) = 0$ であっても $4(x-2)(x-3) = 0$ であっても方程式の解は $x = 2, 3$ であるように $\bigcirc(x-2)(x-3) = 0$ の \bigcirc の部分は何であってもいいです。

このことから $x = \alpha, \beta$ を解にもつ 2 次方程式は $\bigcirc(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ となる。また \bigcirc の部分は x^2 の係数と一致します。

$ax^2 + bx + c = 0$ の x^2 の係数は a だから \bigcirc の部分には a が入ります。以上のことより $ax^2 + bx + c = 0$ が 2 解 $x = \alpha, \beta$ をもつとき $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ となります。

この式変形は分かっていない人が多いけど、本当に重要です。この式変形は数学 2 の積分でよく使う式変形です。大雑把に説明したけどしっかりと理解しておいてください。

では、解と係数の関係と対称式の融合問題に進みます、これまでのことを理解していれば何も難しいことはないと思います。

問題 9

2 次方程式 $x^2 - 3x - 2 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

(4) $\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}$

【解答】

解と係数の関係より $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -2$ がいえる。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 3^2 - 2(-2)$$

$$= 9 + 4$$

$$= 13$$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 3^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3$$

$$= 27 + 18$$

$$= 45$$

(3) $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

$$= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1$$

$$= -2 + 3 + 1$$

$$= 2$$

(4) $\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}$

$$= \frac{\beta(\beta - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

$$= \frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}$$

$$= \frac{13 - 3}{-2 - 3 + 1}$$

$$= \frac{10}{-4}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

練習 8

2次方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の2つの解を α, β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

(4) $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$

以上で2文字の対称式については終了です。2文字の対称式についてはこれまで解説したことを理解していれば絶対に大丈夫ですので、理解できるまで何度も何度も解きなしておいて下さい。

それでは3文字の対称式に進みます。3文字の対称式と言ってもそれほど難しいものではありません。基本的には2文字の対称式と同じように解くことができます。3文字の対称式であっても、基本は対称式を基本対称式に式変形することですし、また3文字の対称式でも基本対称式の値が与えられていないときは、何よりもまず基本対称式の値を求めてから解いていきます。では3文字の対称式に進みましょう。

3文字の対称式

3文字の対称式の基本対称式は $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ の3つ

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)\{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\} + 3abc$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

$$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca)\} + 3abc$$

$$= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} + 3abc$$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ は展開・因数分解の公式です。忘れていた人、知らなかった人はしっかりと覚えておいてください。

【注意】

$a^3 + b^3 + c^3$ を基本対称式のみで表すと厳密には $(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$ ですが、これはやや複雑なので覚えるのはその一手手前の式 $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$ まででいいです。 $a^3 + b^3 + c^3$ の値を求める問題は、その前の段階で $a^2 + b^2 + c^2$ の値を求めていることがほとんどなので $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$ で求めることが多いです。まあ、一応でいいので $a^3 + b^3 + c^3$ を基本対称式で表す導き方をおぼえておいてください。結果は覚えなくていいです。

問題 10

$a + b + c = 1, ab + bc + ca = -3, abc = -2$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $a^2 + b^2 + c^2$

(2) $a^3 + b^3 + c^3$

(3) $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$

(4) $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

【解説 (1)(2)(3)】

(1)(2) については公式通りの問題。(3) についてはよく分からないけど対称式だから基本対称式のみで表すのが基本。 $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ この式を変形するにはとりあえず展開するしかなさそう... と考えて解いていきます。

【解答 (1)(2)(3)】

$$\begin{aligned} (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 1^2 - 2 \cdot (-3) \\ &= 1 + 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 1 \times \{7 - (-3)\} + 3 \times (-2) \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (a - 1)(b - 1)(c - 1) &= (ab - a - b + 1)(c - 1) \\ &= abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1 \\ &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \\ &= -2 - (-3) + 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

【解説 (4)】 について (4) を解く前に次のことを覚えておいて下さい。本当に本当に重要な性質です。

数学で変数(文字)の考え方

数学において変数(文字)が多ければ多いほどとにかく考えにくい!
そこで変数(文字)を減らせるときは何よりもまず、変数(文字)を減らしてから考える。

(注) 問題集の解答なんかを見ていると、変数を最初に減らさないで途中で減らしているものもたまに見られます。確かに変数を途中で消去したほうが計算がラクになることもあります。でも、変数をいつ消去すれば計算がラクになるなんかは、解いてみないと分かりません。だから、変数をいつ消去すれば計算がラクになるだろう?なんて考えるのは時間のムダです。変数を減らせるときは、何よりもまず変数を消去してから考えるということをしつかりと頭に入れておいて下さい。

$a + b + c = (\text{一定})$ の文字消去法

$a + b + c = (\text{一定})$ は $a + b = (\text{一定}) - c, b + c = (\text{一定}) - a, c + a = (\text{一定}) - b$ として文字消去する。

$a + b + c = (\text{一定})$ は、本当によく出てきます。そこで、この文字消去法をしっかりと覚えておいて下さい。

さらに逆から考える方法もあります。

例えば条件で $a + b + c = 0$ が与えられていた。そんなときは上記で説明したように $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$ として文字消去していきます。このとき数式に $a + b, b + c, c + a$ の形が必要(当然 $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$ を使うには、 $a + b, b + c, c + a$ の形が必要)

じゃあ、この文字消去法を使うために条件式に $a + b, b + c, c + a$ が出てくるように式変形をしていこう、と考えます。

どういうときに使えるか、簡単な練習問題をしてみます。

練習問題

$a + b + c = 0$ のとき、 $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ の値を求めよ。

パッと見では、何をしたらいいのかわからないと思うけど、この問題には $a + b + c = 0$ という条件式があります。ということは、 $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ を式変形して何とか $a + b, b + c, c + a$ の形を出すには? なんて考えて解いていきます。

【解答】

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \quad \blacktriangleleft (\text{注}) \\ &= \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} \quad \blacktriangleleft a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b \text{ をそれぞれ代入} \\ &= -1 + (-1) + (-1) \\ &= -3\end{aligned}$$

(注) について

$a + b + c = 0$ の形があるので、強引に $a + b, b + c, c + a$ の形ができるように式変形をした。

数学においては今回のように逆説的に考える方法もあります。「この条件式がきたらこれを使うはず、これを使うにはこう式変形をしないとイケない。」そんなふうに考えていきます。

数学は解き方をある程度暗記しないとイケません(というかほとんど暗記のみ?)。数学の暗記の仕方としては、私は日本語で覚えました。数学の得意な人は、問題を見たらどの条件式を使うか(数学の才能のない私からみれば「なんで?」)と思えるほどポンポンと思いつくことができま

す。でも、そうでない人も多いと思います。そういった人は日本語で覚えることがベストだと思います。

例えば私は次のように覚えました。

- 「対称式がきたら何よりもまず基本対称式のみで表す」
- 「対称式の問題で基本対称式の値が与えられていないときは、何よりもまず基本対称式の値を求める。そして基本対称式の値は必ず問題文に与えられた条件で求められるはず」
- 「数学では、変数が多いほど大変！だから、変数を消去できるときはまず変数を消去する」
- 「文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の範囲に注意する」
- 「分数関数の最大・最小問題はほとんどの場合で相加・相乗平均を使う」

他にもいろいろあります。今回の対称式で解説したことを中心に少し日本語で覚えるの例を挙げてみました。数学は、論理的な科目ということをよく言われます。もっと言えば数学は極めて機械的に解くことができるということです。

機械的に解けるということは、解き方、解法さえ覚えれば解けるようになるということです。数学は、最初のうちは本当になかなか成績があがらない科目です。数学を機械的に解けるようになるには数学の考え方というものを身につける必要があります。

数学の勉強を始めても、最初のうちはこの数学の考え方というものに脳を調節しようとしている状態です。いったん脳が数学の考え方にアジャストしたら急激に数学ができるようになります。

本当に急にです。「嘘やん！」っていうくらい急にできるようになります。何事でもそうだと思いますが、最初は何をしてもほとんど成長しません。自分で思い描いていた進み方とまったく違います。怖いくらいに進みません。

でも、そこで我慢できるかどうかです。大丈夫です。どんなに結果がでなくても、続けていると急にできるようになる瞬間が訪れます。そこまで続けられるかどうかです。がんばりましょう。

説教くさくなってすみません、では問題9に戻ります。

【解答(4)】

$$\begin{aligned}
& \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\
&= \frac{1-a}{a} + \frac{1-b}{b} + \frac{1-c}{c} \quad \leftarrow a+b=1-c, b+c=1-a, c+a=1-b \text{ をそれぞれ代入} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{a}{a} + \frac{1}{b} - \frac{b}{b} + \frac{1}{c} - \frac{c}{c} \\
&= \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} - 1 + \frac{1}{c} - 1 \\
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \\
&= \frac{ab+bc+ca}{abc} - 3 \\
&= \frac{-3}{-2} - 3 \quad \leftarrow ab+bc+ca=-3, abc=-2 \text{ をそれぞれ代入} \\
&= \frac{3}{2} - 3 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

今回の問題も分数の対称式なので今までと同じように通分をして計算をしていってももちろん求めることができますが、少し計算が面倒だと思います。

練習 9

$x+y+z=3, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $(x-3)(y-3)(z-3)$

(2) $x^3+y^3+z^3$

【ヒント】この問題は条件式からすべての基本対称式の値を出すことはできません。そんなときは、とりあえず基本対称式どうしの関係式を導いてから問題を解いていきます。そうすれば、互いに打ち消しあってくれる形になります。

では、これから3次関数の解と係数の関係に進みます。2次関数の解と係数の関係とほとんど同じで簡単です。

解と係数の関係 (3 解)

$$\begin{aligned}
& ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ の 3 解を } \alpha, \beta, \gamma \text{ とする。} \\
& \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \text{ がいえる。}
\end{aligned}$$

証明は2解の解と係数の問題と同じようにできますので、各自やっておいてください。

問題 11

$x^3 + 3x^2 - 4x + 3 = 0$ の 3 解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

【解答】

解と係数の関係より $\alpha + \beta + \gamma = -3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4, \alpha\beta\gamma = -3$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\
 &= (-3)^2 - 2(-4) \\
 &= 9 + 8 \\
 &= 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\
 &= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \\
 &= (-3) \times \{17 - (-4)\} + 3 \times (-3) \\
 &= (-3) \times 21 - 9 \\
 &= -63 - 9 \\
 &= -72
 \end{aligned}$$

練習 10

$x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$ の 3 解を α, β, γ とする。このとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

$$(2) \quad \frac{(\beta + \gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\gamma + \alpha)^2}{\beta} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{\gamma}$$

これで対称式の問題は終了です。本当に本当におつかれさまです。対称式に関してはこのプリントだけで大丈夫です。理解できるまで何度も何度も解いてください。

最初に話しましたが対称式には、三角関数や指数・対数で出題されることもあります。そういった問題をいくつか集めた問題をまた次の機会に解説したいと思います。

とりあえずはこのプリントを繰り返し理解できるまで解いてください。僕のプリントで勉強をしてくれてありがとうございます。がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com