　こんにちは、河見賢司です。今回は、お茶の水女子大学の２００８年の入試問題を１問解いてもらいます。

内容としては数学 I と数学 II です。難易度としては、お茶の水大学では標準レベルの問題だと思います。

この問題は、計算量としては本当に微々たるもので早い人なら５分とかからずに解けると思います。でも、解法が思いつかない人にとってはなかなか難しい、というかお手上げ状態になってしまうと思います。

でも、少し数学の考え方というものが身に付いたら簡単に思いつけます。教科書や問題集では、数学の発想のしかたというものがなかなか載っていないです。この問題を通して、受験問題の考え方というものを理解していってください。

問題

a, b, c, d を正の定数とし $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ が成り立つことを示せ。

(2) x, y を正の定数とし、$ad - bc = 1$ であり $\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{a}{b}$ とする。
このとき $ax - by$ および $dy - cx$ が正の整数であることを示し $b + d \leqq x,\ a + c \leqq y$ が成り立つことを示せ。

【(1) の解説】

$\dfrac{c}{d} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ は $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a+c}{b+d}$ かつ $\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ なので、

$\dfrac{c}{d} < \dfrac{a+c}{b+d}$ と $\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ の式をふたつ証明したら終了です。

不等式の証明は、(左辺) < (右辺) の証明なら、(右辺) – (左辺) をして、その式が (> 0) であるというふうにもっていくのが基本です。今回もそれにしたがって解いていくだけです。

数学は、与えられた条件を全て使います。今回与えられている条件は $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ という条件だけなので、当然この条件を使います。

今回は $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ という条件ですが、これは分数です。分数の条件は、分数のまま条件を使う可能性もありますが、分数では考えにくいので分数を消してから考えることもあります。

$\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ の両辺に $bd(>0)$ をかけます。すると $\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \Rightarrow bc < ad$ となります。この不等式を条件式として使う可能性もあるので、問題を解く前に頭に入れておくようにしましょう。

あと、両辺に bd をかけましたが、不等式の両辺に変数をかける時は必ず正かどうか確認をするようにしてください。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d}$ かつ $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$

ここで $\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d}$ を示す。

$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}$ ◀ (右辺)−(左辺) より

$= \frac{(a+c)d}{(b+d)d} - \frac{c(b+d)}{d(b+d)}$ ◀ とりあえず通分をした

$= \frac{1}{(b+d)d}(ad + cd - bc - cd)$

$= \frac{1}{(b+d)d}(ad - bc)$

とりあえずここまで (右辺) − (左辺) を単純に計算していくことにより、ここまで式変形できましたが、どうもこれ以上式変形できそうにありません。ここまできて、はじめて与えられた条件を使うのかな？と思うようにしてください。

$\frac{1}{(b+d)d}(ad - bc)$ が正であることを示すのですが、a, b, c, d は正なので、当然 $\frac{1}{(b+d)d}$ は正となります。残りの $ad - bc$ が正であればこの不等式は証明できたことになります。$ad - bc$ が正であることは、与えられた条件式 $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ から簡単に導けますよね。分数を払った形です。

ここで、$\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ の両辺に $bd(>0)$ をかけると $bc < ad$ となり、よって、$ad - bc > 0$ となる。

(与式) $= \frac{1}{(b+d)d}(ad - bc)$ であるが、

$\frac{a}{(b+d)d} > 0$ ($\because a, b, d > 0$) と $ad - bc > 0$ を考え、(与式) > 0

よって、$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d}$

次に、$\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ を示す。

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}$$ ◀ (右辺) – (左辺) より
$$= \frac{a(b+d)}{b(b+d)} - \frac{b(a+c)}{b(b+d)}$$ ◀ 通分をした
$$= \frac{1}{b(b+d)}(ab + ad - ab - bc)$$
$$= \frac{1}{b(b+d)}(ad - bc) > 0 \ (\because \frac{1}{b(b+d)} > 0,\ ad - bc > 0)$$

以上より、$\dfrac{c}{d} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{a}{b}$ が成り立つ。

【(2) の解説】

まず前半の問題 $ax - by$ と $dy - cx$ が正であることの証明です。これは、どうやったら証明できるのかな？と考えるんだけど、$\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{a}{b}$ という式から、分数を払えば ax, by や dy, cx が出てくるのでとりあえず $\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{b}{a}$ からの分数を払って考えます。

$\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x}$ の両辺に $dx(> 0)$ をかけると $cx < dy$ です。これより $dy - cx > 0$ となります。$ax - by > 0$ の方も同様に証明をすることができます。

前半は、簡単なんですが後半が少し難しいです。後半は $b + d \leqq x$, $a + c \leqq y$ であることを示す問題です。

で、どうやって示したらいいのかな？と考えるんだけど、さっきも話したけど、**数学は与えられて条件を１００パーセント使います。**

今回の問題では、$ad - bc = 1$ と $\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{a}{b}$ なんかが条件として与えられていますが、$\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{a}{b}$ という条件は、前半に使ったので使わない可能性が高いです。

それとは別に、前半で証明した式 $ax - by > 0$ と $dy - cx > 0$ を新たな条件として使って解いていきます。前問で、証明した式はそれ以降、その証明した式を使った問題を解いていくということが受験問題では本当に多いです。

で、これらの条件式を使ってなんとか $b + d \leqq x$, $a + c \leqq y$ を証明したいんだけど、どうしようかな？

なんとかして $ad-bc=1$ っていう条件式を使いたいんだけど、これの使い道って思いつかないよね？$ad=1+bc$ として ad をどこかに代入するのかな？と考えても ad がどこにもないので、どうも使えそうにない。

そこで、あれこれ考えてみて $ax-by>0$ の両辺に $c(>0)$ をかけます。さらに $dy-cx>0$ の両辺に a をかけます。その式を互いに足し合わせると、$ad-bc$ が出てきてくれます。

このあたりの式変形は、なかなか思いつかないと思いますが、ポイントとしては、「数学は与えられた条件を１００パーセント使う」ということから、まだ使っていない「$ad-bc=1$ という条件を使うには？」とあれこれと考えます。そうすると、思いつけるようになってくると思います。

$ax-by>0$ の両辺に c をかけると $acx-bcy>0\cdots$①
$dy-cx>0$ の両辺に a をかけると $ady-acx>0\cdots$②

①, ② より、

$acx-bcy+ady-acx>0$ ◀ ①, ② の右辺同士と左辺同士を足し合わせた

$ady-bcy>0$

$ad-bc>0$ ◀ 両辺を $c(>0)$ で割った

とりあえず $ad-bc$ をなんとか出したけど、これでは証明にならないよね？で、そこからさらに考えないといけないんですけど、繰り返しになるけど、数学では与えられて条件は１００パーセント使います。

これまで与えられた条件をほとんど使ってきましたが、まだ見落としている条件があります。見落としている条件は、$ax-by$ と $dy-cx$ が**正の整数**という条件です。これまでは $ax-by>0$ という条件を使っていましたが、この条件かつ $ax-by$ は整数という条件を使うと、$ax-by$ は 0 より大きな整数となります。ということは、当然 $ax-by$ は 1 以上の整数となります。

このことより、$ax-by\geqq 1,\ dy-cx\geqq 1$ という条件が出てきます。この条件式を使って、先ほどと同じような式変形をしていくと、うまく証明することができます。なかなか思いつきにくいですが、なんとか思いつけるようにしておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

$\dfrac{c}{d}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{a}{b}$ より、$\dfrac{c}{d}<\dfrac{y}{x}$ かつ $\dfrac{y}{x}<\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{y}{x} < \dfrac{a}{b}$

$\Leftrightarrow by < ax$ ◀ 両辺に $bx(>0)$ をかけた

$\Leftrightarrow ax - by > 0$

ここで、a, x, b, y は整数なので $ax - by$ も整数となる。よって、$ax - by$ は正の整数。

$\dfrac{c}{d} < \dfrac{y}{x}$

$\Leftrightarrow\ cx < dy$ ◀ 両辺に $dx(>0)$ をかけた

$\Leftrightarrow\ dy - cx > 0$

ここで、d, y, c, x は整数なので $dy - cx$ も整数となる。よって、$dy - cx$ は正の整数。

$ax - by,\ dy - cx$ はともに正の整数なので $ax - by \geqq 1 \cdots ①,\ dy - cx \geqq 1 \cdots ②$ がいえる。

$① \times d$ より、$adx - bdy \geqq d \cdots ①'$　$② \times b$ より、$bdy - bcx \geqq b \cdots ②'$

$①', ②'$ より、

$adx - bdy + bdy - bcx \geqq b + d$ ◀ $①'$ と $②'$ の右辺同士、右辺同士を足し合わせた

$adx - bcx \geqq b + d$

$(ad - bc)x \geqq b + d$

$x \geqq b + d$ ($\because ad - bc = 1$ より)

$① \times c$ より、$acx - bcy \geqq c \cdots ①''$　$② \times a$ より、$ady - acx \geqq a \cdots ②''$

$①'', ②''$ より、

$acx - bcy + ady - acx \geqq c + a$ ◀ $①''$ と $②''$ の右辺同士、右辺同士を足し合わせた

$ady - bcy \geqq c + a$

$(ad - bc)y \geqq c + a$

$y \geqq a + c$ ($\because ad - bc = 1$ より)

今回は、これで終了です。大学受験の問題に慣れていない人は少し難しかったと思います。この問題は、条件の使い方などで、大学受験にとって重要な考え方が必要になります。何度か繰り返して、しっかりと理解しておくようにしてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com