こんにちは、河見賢司です。

前回、同次式に関する問題を解説しました。今回は、同次式をより理解してもらうための問題を用意しました。前回の同次式のプリントを見ていないという人は、こちらのプリントを見てください。
http://www.hmg-gen.com/tecni12-2.pdf

さっそくですが、以下の問題を解いてください。

問題３

x, y を $x = 0$ かつ $y = 0$ を除く任意の実数とする。

$\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

この問題は数学 I、II、III の解法の３通りあります。どれも重要です。最大値、最小値の考え方はこんなのもあるんだな、ということを理解してください。

【解説】

解法が３通りあるといいましたが、最初のうちは同じです。

分母と分子の次数が同じなので同次式です。分母、分子を x^2 で割っていきますが、今回の問題では、問題１や問題２（前回のプリントに載せてあります）とは違い $x > 0$ という条件はありません。

分母分子を x^2 で割りたいのですが、0 で割るということはできないので、$x = 0$ と $x \neq 0$ で場合分けが必要になるということを忘れないようにしてください。

$x = 0$ のとき、$\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ に $x = 0$ を代入すると $\dfrac{y^2}{y^2} = 1$ となる。

$x \neq 0$ のとき、

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1+2\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ 分母分子を x^2 で割った

ここで $\frac{y}{x}=t$ とする。

$$=\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$$ ◀ t のみの式になった

とりあえず同次式の考え方で解いていきました。$t=\frac{y}{x}$ と置き換えました。文字を置き換えた時は範囲に注意しないといけませんが、$\frac{y}{x}$ はすべての値の範囲をとります (x, y は $x=0$ を除く任意の実数なんだから $t=\frac{y}{x}$ がすべての値をとるということは当たり前だよね？)。

ここまでの解き方はいっしょなんですが、ここからの解法が 3 通りあります。3 通りともよく出てくる解法なのでしっかりと理解しておいてください。まずは数学 I の解法です。今回の問題では、この解法が一番楽です。

t が実数全体を動くとき、$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$ が k という値をとるか？ということから考えていきます。

t はすべての実数を動くとき、$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$ が k という値をとりうる。

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}=k$ を満たす実数 t が存在する。

$\Uparrow$ 上記の $\Leftrightarrow$ の記号は同値変形という意味です。

「$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$ が k という値をとりうる」と「$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}=k$ を満たす実数 t が存在する」は数学的に見て同値 (まったく同じ) ということです。

ひとつ目の「$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$ が k という値をとりうる」より、ふたつ目の「$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}=k$ を満たす実数 t が存在する」これの方が考えやすそうだよね。

こういうふうに数学は考えやすいように同値変形をしていきます。同値変形のときは、同値性が保たれているか丁寧に考えるようにしてください。

$\Longleftrightarrow$ $1+2t+t^2 = k(1+t^2)$ を満たす実数 t が存在する。◀ $\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2} = k$ の両辺に $1+t^2$ をかけた

以下、$1+2t+t^2 = k(1+t^2)$ を満たす実数 t が存在する k の値の範囲を求めることとする。

ここからは、簡単だよね。$1+2t+t^2 = k(1+t^2)$ は t についての 2 次方程式で、実数 t が存在したらいいので、当然 (判別式)≧ 0 を使うだけです。

ただ、判別式を使うには当たり前なんだけど、2 次方程式である必要があります。t^2 の係数が 0 になると 2 次方程式でなくなるので場合分けが必要になります。それでは、解答に進みます。

【解答（数学 I の解法)】

(I)　$x = 0$ のとき

$\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ に $x = 0$ を代入すると、(与式) $= \dfrac{y^2}{y^2} = 1$ となる。

(II)　$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1+2\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ 分母分子を x^2 で割った

ここで $\dfrac{y}{x} = t$ とする。

$$=\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$$ ◀ t のみの式になった

ここで、$\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2} = k$ という値をとるとする。これは、$\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2} = k$ を満たす実数 t が存在することと同値なので、以下この条件を満たす k を求めていく。

$$\frac{1+2t+t^2}{1+t^2} = k$$

$\Leftrightarrow (1+2t+t^2) = k(1+t^2)$ ◀ 両辺に $1+t^2$ をかけた

$\Leftrightarrow (k-1)t^2 - 2t + k - 1 = 0 \cdots (*)$ ◀ t について整理した

(i)　$k=1$ のとき
$\Uparrow k=1$ のとき、t^2 の係数が消えて 0 になって 2 次方程式でなくなるので、判別式が使えない！

$(*)$ に $k=1$ を代入すると $-2t=0$ つまり $t=0$ となる。$t=0$ という実数が存在するので、$k=1$ という実数が存在するので、適する。$\Leftarrow$ $\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2}=k$ を満たす実数 t が存在すれば条件に適する。$k=1$ のとき、$t=0$ という実数が存在するので $k=1$ も OK となる。

(ii)　$k \fallingdotseq 1$ のとき
$(k-1)t^2-2t+k-1=0$ の判別式を D とする。実数 t が存在するには $D \geqq 0$ であればよい。

$$D/4 = 1-(k-1)^2 \geqq 0$$
$$(k-1)^2-1 \leqq 0$$ ◀ 両辺に -1 をかけた
$$k^2-2k+1-1 \leqq 0$$
$$k^2-2k \leqq 0$$
$$k(k-2) \leqq 0$$
$$\therefore\ 0 \leqq k < 1,\ 1 < k \leqq 2$$ ◀ $k \fallingdotseq 1$ という条件のもとなので $0 \leqq k \leqq 2$ から $k=1$ を除いた

(i) (ii) より、$0 \leqq k \leqq 2$ $\Leftarrow$(i) の $k=1$ と (ii) の $0 \leqq k < 1,\ 1 < k \leqq 2$ を合わせると、$0 \leqq k \leqq 2$ になる。

(I) (II) より、$0 \leqq k \leqq 2$ $\Leftarrow$(I) の $k=1$ と (II) の $0 \leqq k \leqq 2$ を合わせると、$0 \leqq k \leqq 2$ になる。

以上より、最小値は 0、最大値は 2 となる。 ◀ これが答え

次の解法は、数学 II の解法 (と言っても、途中で相加相乗平均を使うので数学 II の解法になっているだけで、考え方としてはほとんど数学 I の考えで解くことができます)。

途中の式変形までは解法 1 と同じです。$\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2}$ のところから変わってきますが、今回は分数関数の次数下げを行います。

次数下げがよく分からないという人は、同次式のひとつ目のプリント
http://www.hmg-gen.com/tecni12-2.pdf の問題 2 を見てください。

次数下げをすることにより $\dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2}=\dfrac{(1+t^2)+2t}{1+t^2}=1+2\dfrac{t}{1+t^2}$ と式変形できます。

ここからは、$1+2\dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値、最小値を全体で考えるより、変数を含んだ部分 $\dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値、最小値を考え最後に全体の $1+2\dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値、最小値を考えます。

$\dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値、最小値を求めていけばいいのですが、分母分子を t で割ることによって相加相乗平均を使える形になります。

ですが相加相乗平均を使うためには正という条件が必要です。今回は t が正と言う条件がないので、場合分けが必要になります。

t は、$t>0$, $t<0$, $t=0$ の３つに場合分けできます。

$t>0$ のときは、$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$ となります。$t>0$ のときは、これでいいのですが $t<0$ のときは少し工夫がいります。相加相乗平均は正という条件が必要です。でも、今回は $t<0$ です。これを相加相乗平均を使える形にするには $t=-s$ とでも置き換えたらいいんじゃない？$t=-s$ とおくと、$t<0$ のとき $s>0$ となり、正という条件になるから相加相乗平均が使える形になったよね。$t=-s$ と置き換えたとき $t+\dfrac{1}{t}$ の範囲を求めたいと思います。

$t+\dfrac{1}{t}=-\left(-t+\dfrac{1}{-t}\right)$ と式変形をして $-t$ に s を代入します。

すると $t+\dfrac{1}{t}=-\left(-t+\dfrac{1}{-t}\right)=-(s+\dfrac{1}{s})$ と変形できるので、$s>0$ という条件があるので、ここから相加相乗平均を使える形になります。慣れてくるとわざわざ $t=-s$ と置き換えることはないかもしれませんが、慣れてくるまでは置き換えてもらったらいいと思います。こういった式変形はよく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

$t=0$ のときは、普通に代入をするだけです。

それでは解答に進みます。

【解答 (数学 II) の解法】

(Ｉ) $x=0$ のとき

$\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ に $x=0$ を代入すると、(与式) $=\dfrac{y^2}{y^2}=1$ となる。

(II) $x \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1+2\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ 分母分子を x^2 で割った

ここで $\frac{y}{x}=t$ とする。

$$=\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$$ ◀ t のみの式になった

$$=\frac{(1+t^2)+2t}{1+t^2}$$

$$=1+2\frac{t}{1+t^2}$$ ◀ 次数下げをした

以下 $\frac{t}{1+t^2}$ の最大値と最小値を求める。

⇑ もちろん全体で求めてもいいが、$1+2\frac{t}{1+t^2}$ 全体で考えるより、$\frac{t}{1+t^2}$ で考えるほうが計算がラク。

(i) $t>0$ のとき、$\frac{t}{1+t^2}$ の分母分子を t でわると $\frac{1}{\frac{1}{t}+t}$ となる。

ここで相加相乗平均より $\frac{1}{t}+t \geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot t}=2$ となる。

$t=\frac{1}{t}$ つまり $t=1$ のとき、等号は成立する。

$t>0,\ \frac{1}{t}+t \geqq 2$ より、$0<\frac{1}{\frac{1}{t}+t} \leqq \frac{1}{2}$ となる。

⇑ $\frac{1}{t}+t \geqq 2$ なので $2 \leqq \frac{1}{t}+t<+\infty$ (∞ とは無限大のことです。∞ は数学 III の範囲ですが、$\frac{1}{t}+t$ は 2 以上の数はいくつでもとりうるので無限大としました。不等式 $2 \leqq \frac{1}{t}+t<+\infty$ と書きましたが、これは厳密にいうと正しくないですが、あくまで説明上分かってもらうために書きました)

$2 \leqq \frac{1}{t}+t<+\infty$ の逆数をとると、全ての辺が正なので不等号の向きが逆になります。$\frac{1}{2} \geqq \frac{1}{\frac{1}{t}+t}>\frac{1}{+\infty}$

ここで $\dfrac{1}{+\infty}$ がどうなるか考えると、分母が限りなく大きくなるのだから当然 0 となります。$\dfrac{1}{1000}, \dfrac{1}{10000}$ と分母が大きくなれば、0 に近づくよね？

よって、$0 < \dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+t} \leqq \dfrac{1}{2}$ が成立します。

(ii)　$t<0$ のとき、$s=-t$ とする。$t<0$ より $s>0$ となる。

$$\frac{t}{1+t^2}$$

$$= \frac{-s}{1+s^2}$$ ◀ $t=-s$ を代入した $= \ -\dfrac{s}{1+s^2} = -\dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+s}$

(i) と同様に考え $0 < \dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+s} \leqq 2$ となるので、

⇑ s と t は条件が $t>0$ と $s>0$ とまったく同じ。当然 $0 < \dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+t} \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$0 < \dfrac{1}{s+\dfrac{1}{s}} \leqq \dfrac{1}{2}$ となります。

$-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+s} < 0$ ◀ $0 < \dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+s} \leqq 2$ のすべての辺に -1 をかけた となる。よって、$-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{t}{1+t^2} < 0$

(iii)　$t=0$ のとき、$\dfrac{t}{1+t^2}$ に $t=0$ を代入すると、$\dfrac{t}{1+t^2}=0$ となる。

(i), (ii), (iii) より、$-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{t}{1+t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ となる。

⇑ (i) の $t>0$ のとき $0 < \dfrac{t}{1+t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ と (ii) の $t<0$ のとき $-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{t}{1+t^2} < 0$ と (iii) の $t=0$ のとき $\dfrac{t^2}{1+t^2}=0$ を合わせると、$-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ となる。

$\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲が分かったので、ここからは (与式) の $1+2\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲を求めます

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{t}{1+t^2} \leqq \frac{1}{2}$$

$$-1 \leqq 2\frac{t}{1+t^2} \leqq 1$$ ◀ 全ての辺に 2 をかけた

$$0 \leqq 1+2\frac{t}{1+t^2} \leqq 2$$ ◀ 全ての辺に 1 を加えて、これで (与式) の範囲が求まった！

以上より、$t \fallingdotseq 0$ のとき、$0 \leqq \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} \leqq 2$ となる。

(I), (II) より、$0 \leqq \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} \leqq 2$ となる。よって、最小値は 0、最大値は 2 となる。

⇑ これが答え

今回の問題では、相加相乗平均にはこういった使い方 (文字を置き換えることによって、強引に相加相乗平均を使う解法) があるということを説明するために $\dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値、最小値で (i) $t>0$、(ii) $t<0$ と場合分けをしました。

でも、$\dfrac{t}{1+t^2}$ は奇関数であるということを考えると場合分けをしなくても求めることができます。奇関数とは原点対称な形をしているので、$t>0$ における $\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲にマイナスをつけたものが $t<0$ における $\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲になります。

$t>0$ における $\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲は $0 < \dfrac{t}{1+t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ で、$t<0$ における $\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲は $-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{t}{1+t^2} < 0$ だから、ちょうどマイナスをかけた形になっているよね。気づければこっちで解いた方が当然早いです。

それでは、数学 III の範囲で解いていきます。数学 III の解法も、数学 II の解法と途中まではまったく同じです。

数学 II の解法は $\dfrac{t}{1+t^2}$ の範囲を相加相乗平均で解いていきましたが、数学 III の解法はグラフをかいて解いていきます。

最大値、最小値の問題ですが、「関数の最大値、最小値問題の基本はグラフをかいて解いていく」という鉄則があります。

ですが、分数関数のグラフは数学 III を勉強しないと解けないので、数学 II までの範囲で分数関数の最大値、最小値問題が出てきたらグラフをかく以外の解法が必ずあります（そうでないと問題が解けない）。

数学 II までの範囲で、分数関数の最大値、最小値問題が出てきたら相加相乗平均を使うことが圧倒的に多いということを頭に入れておいてください。

関数の最大値、最小値問題の基本はグラフをかくことです。分数関数の最大値、最小値もグラフをかくことで求めることができますが、分数関数のグラフをかくのは一般的に少し面倒です。

ですから、分数関数の最大値、最小値の問題はグラフをかく以外の解法はないかと考えて、どうしても見つからない場合グラフをかいて求めるようにしてください。

今回もグラフを使って解く以外の解法があるので、本来ならグラフでは解いて欲しくないのですが、グラフを使って最大値、最小値が求められるということを知ってもらうためにあえてこの解答を紹介します。

【解答 (数学 III) の解法】

(Ⅰ) $x=0$ のとき

$\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ に $x=0$ を代入すると、(与式) $=\dfrac{y^2}{y^2}=1$ となる。

(II) $x \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1+2\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ 分母分子を x^2 で割った

ここで $\dfrac{y}{x}=t$ とする。

$$=\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}$$ ◀ t のみの式になった

$$=\frac{(1+t^2)+2t}{1+t^2}$$

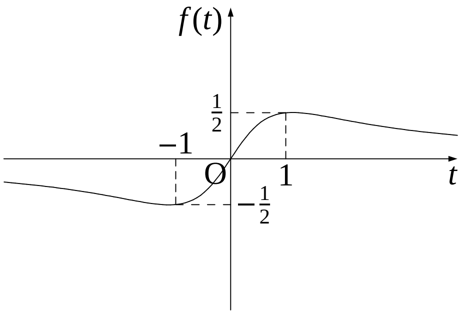
$$=1+2\frac{t}{1+t^2}$$ ◀ 次数下げをした

以下 $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ の最大値と最小値を求める。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t}{t^2+1} \\
f'(t) &= \frac{t'\,(t^2+1) - t\,(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

x		-1		1	
$f(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ $\searrow$	

$\lim\limits_{x\to\infty} f(t) = 0,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(t) = 0$ と増減表を考え、グラフは下図のようになる。



グラフより、$-\dfrac{1}{2} \leqq f(t) \leqq \dfrac{1}{2}$

ここからの解答は、先ほどの解法 II と同じなので割愛します。

今回は、同次式の問題を３通りで解いてみました。一番最初の判別式を使って解く解法が一番簡単だと思います。ですが、相加相乗平均、グラフを使って解く解法も重要です。

一通りの解き方だけでなく複数の解き方で解けるようになると、格段に数学の力が伸びます。少し難しかったかもしれませんが、しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com