「２次関数と指数対数、三角関数の関係」その２

こんにちは、河見賢司です。今日は２次関数の重要性の話をしたいと思います。

前回は、２次関数の知識がどのように三角関数、指数対数の問題につながるかという話をしました。前回は、文字の置き換えの問題を中心に解説しました。詳しくはこちらを見てください。

「２次関数を使って解く指数対数と三角関数の問題その１」
http://www.hmg-gen.com/tecni12-3.pdf

今日は、「文字消去」の問題について話したいと思います。まずは、次の２次関数の問題を解いてください。知っている人も多いと思いますが、かなり詳しく解説します。

２次関数の問題

$8x+y^2=8$ のとき，x^2+y^2 の最小値とそれを与える x, y をそれぞれ求めよ。

【解説】
まず最初の考え方なんですが**数学は文字数が多ければ多いほど考えにくい**という鉄則があります。

この問題は x^2+y^2 と元の式は変数は x と y のふたつです。

問題に与えられた条件式 $8x+y^2=8$ から $y^2=8-8x$ を $x^2+y^2=x^2+8-8x$ とすると変数が x のみになってくれます。

元の式の変数が x, y の２つだったんだけど、この式は変数が x のみのひとつになったから考えやすくなり、ここからはこれを使って解いていきます。

ここからはほとんどの人ができると思うんですけど、たまに次のように間違える人がいます。

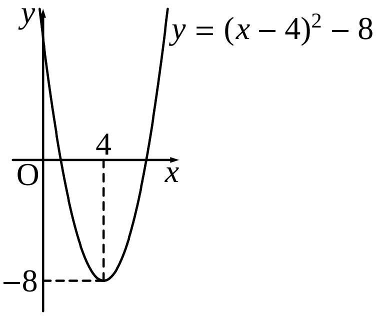
【誤答例】
$8x+y^2=8$ より $y^2=8-8x\cdots$①

① を x^2+y^2 に代入すると

$x^2 + y^2 = x^2 + (8 - 8x)$ ◀ ① を $x^2 + y^2$ に代入した

$= x^2 - 8x + 8$

$= (x - 4)^2 - 8$ ◀ グラフをかくためにに平方完成をした



グラフより $x = 4$ のとき、最小値 -8 をとる

上記の誤解例のどこがおかしいか分かるかな？ここが今回のポイントです。

$y^2 = 8 - 8x$ を代入したんだけど。y^2 は 2 乗なんだから当然 0 以上（←2 乗は 0 以上）だよね。

$y^2 = 8 - 8x$ だから y^2 と $8 - 8x$ は等しい。そして $y^2 \geqq 0$ なんだから、当然 $8 - 8x$ も $8 - 8x \geqq 0$ っている条件が成り立つ (← $y^2 \geqq 0$ に $y^2 = 8 - 8x$ を代入したらそうなる) よね。

上記の誤解例では、**文字消去したにもかかわらす、消去した文字の範囲を考えるのを忘れたから間違ってしまったんだ。**

そこで次のことを覚えておいてください。

文字を消去したときの注意点

文字消去したときは、消去した文字の範囲を必ず確認する

このことは本当に重要です。文字を消去したときはとにかく消去した文字の範囲を必ず確認するようにしておいてください。

このことを踏まえて解答に進みます。

【解答】

$8x + y^2 = 8$ より $y^2 = 8 - 8x \cdots$ ①

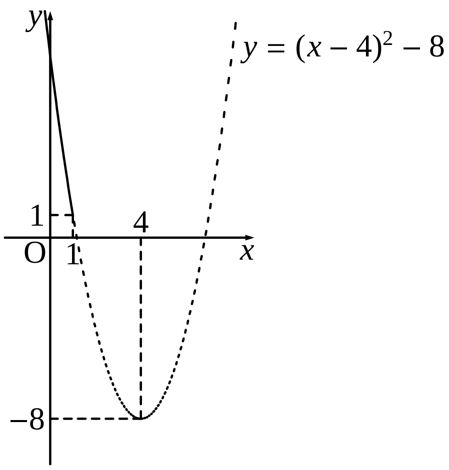
$y^2 \geqq 0$ より $8-8x \geqq 0$ ◀ 消去したときは範囲に注意

$$8-8x \geqq 0$$
$$-8x \geqq -8$$
$$x \leqq 1$$

x^2+y^2 に ① を代入して

$x^2+y^2 = x^2+(8-8x)$ ◀ $y^2 = 4-4x$ を代入

$= (x-4)^2-8$ ◀ 平方完成をした（グラフをかくために）



グラフより $x=1$ のとき、最小値 1 をとる。

また $y^2 = 8-8x$ に $x=1$ を代入すると $y=0$

以上より最小値は 1（$x=1,\ y=0$）

文字を消去するときは必ず消去する文字の範囲に注意するということを覚えておいてください。

重要なのでもう一度かいておきます。

文字を消去したときの注意点

文字消去したときは、消去した文字の範囲を必ず確認する

このことを踏まえて指数対数の問題を2問ほど解いてもらいます。

指数対数の問題1

$x \geqq 3,\ y \geqq \dfrac{1}{3},\ xy = 9$ をみたす。このとき $\log_3 x \cdot \log_3 y$ の最大値と最小値、さらにそれらを与える x, y の値を求めよ。

【解説】
この問題も文字消去をして考えていきます。文字消去したときは、範囲を考えるということを忘れないようにしてください。それでは、解答に進みます。

【解説】
$xy = 9$ より、$y = \dfrac{9}{x}$ となる。

$y \geqq \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{9}{x} \geqq \dfrac{1}{3}$ ◀ $y = \dfrac{9}{x}$ を代入した

$\dfrac{9}{x} \cdot x \geqq \dfrac{1}{3}x$ ◀ 両辺に x をかけた。

⇑両辺に変数をかける時は、その変数の正負を考えないといけないが今回は x の値の範囲は $x \geqq 3$ と正なので、両辺に変数の x をかけても不等号の向きは変わらない。忘れやすいので注意して下さい。

$9 \geqq \dfrac{1}{3}x$

$x \leqq 27$

$x \geqq 3$ かつ $x \leqq 27$ より、$3 \leqq x \leqq 27$ ◀ これが x の範囲

$\quad \log_3 x \cdot \log_3 y$

$= \log_3 x \cdot \log_3 \dfrac{9}{x}$ ◀ $y = \dfrac{9}{x}$ を代入して、x のみの式にした

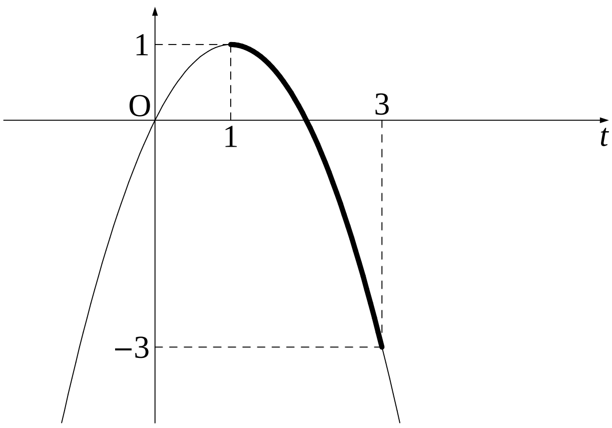
$= \log_3 x \cdot (\log_3 9 - \log_3 x)$ ◀ $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ の公式を利用した

$= \log_3 x \cdot (2 - \log_3 x)$ ◀ $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$ より。$\log_3 x$ のみの式になってくれた！

ここで、$\log_3 x = t$ とおく。

$3 \leqq x \leqq 27$ より、$1 \leqq t \leqq 3$ ◀ 文字を置き換えた時は範囲に注意 となる。

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \log_3 x \cdot (2 - \log_3 x) \\
&= t(2 - t) \quad ◀\ \log_3 x = t\ \text{を代入した} \\
&= -t^2 + 2t \\
&= -(t^2 - 2t) \\
&= -(t - 1)^2 + 1 \quad ◀\ \text{最大値、最小値の基本はグラフ。グラフを書くために平方完成をした。}
\end{aligned}
$$



グラフより、$t = 1$ のとき最大値 1 をとり、$t = 3$ のとき最小値 -3 をとる。

$t = 1$ のとき $1 = \log_3 x$ より $x = 3$ また $xy = 9$ より $y = 3$ となる。

$t = 3$ のとき $3 = \log_3 x$ より $x = 27$ また $xy = 9$ より $y = \frac{1}{3}$ となる。

以上より、$(x, y) = (3, 3)$ のとき最大値 1 をとり、$(x, y) = (27, \frac{1}{3})$ のとき最小値 -3 をとる。

では、次にもう一問指数対数の問題を解いてください。

指数対数の問題 2

$x > 0,\ y > 0,\ xy = \dfrac{1}{4}$ のとき、$z = \log_2(x^2 + y)$ の最小値を求めよ。

【解説】
この問題も $z = \log_2(x^2 + y)$ と変数が x, y と 2 つあるので 2 変数関数で考えにくいです。

文字を消去できるときは消去したらいいんだけど、$xy = \dfrac{1}{4}$ から $y = \dfrac{1}{4x}$ として代入をしたら y が消えるので、z は x のみの式になって考えやすくなります。

くどいようにいっているけど、文字消去したときは範囲に注意しないといけないんだったよね？今回も当然範囲に注意しないといけません。そこで文字消去したときの範囲を考えていきます。

y を消去したときの範囲は分かる人は計算をせずにすぐに分かると思いますが、一応計算で丁寧に求めてみます。

$y > 0$

$\dfrac{1}{4x} > 0$ ◀ $y = \dfrac{1}{4x}$ を代入した

$\dfrac{1}{4x} \cdot x^2 > 0 \cdot x^2$ ◀ 両辺に $x^2(> 0)$ をかけた。下の (注) を見よ

$\dfrac{x}{4} > 0$

$x > 0$ ◀ x の範囲が求まった

こうやって、y を消去したときの x の範囲を丁寧に求めましたが、元からある x の範囲が $x > 0$ なので、これと同じになりましたがこれはたまたま同じになっただけです。文字消去したときは必ず範囲を考えるようにしてください。

(注) $\dfrac{1}{4x} \cdot x^2 > 0 \cdot x^2$ で両辺に x^2 をかけた意味が分からない人もいると思います。これは分数を含んだ不等式でよく使う手法です。

分数では考えにくいので分数を払いたい。で、分数を払うために両辺に x をかけたい。でも、不等式の両辺にかけるときマイナスだったら不等号の向きが逆になる。プラスのときは、不等号の向きはそのまま。こういった場合は場合分けが必要になる。2 乗じゃなかったら正となるときも負となるときもあるけど、x^2 だったら絶対に正なので場合分けが必要なくなる。

分母に文字を含んだ不等式の分数を払うには、両辺に $(\text{分母})^2$ をかける解き方があるということを覚えておいてください。

この問題では $x > 0$ という条件があるので、わざわざ x^2 をかける必要はないですが今回は両辺に $(\text{変数})^2$ をかけるという手法を知って欲しいのであえて x^2 を両辺にかけました。

で、ここから $z = \log_2(x^2 + y)$ の最小値を求めていくんですけど、$y = \log_2 x$ って単調増加 (x が大きくなると y も大きくなる) の関数なんだから、$\log_2(x^2 + y)$ が最小となるのは真数の $x^2 + y$ が最小になるときです。以下、真数の $x^2 + y$ の最小値を求めていくことにします。

x^2+y に $y=\dfrac{1}{4x}$ を代入したら、$x^2+\dfrac{1}{4x}$ ってなるけどここからどう解こうかな？

関数の最大値、最小値はグラフをかいて解いていくっていうのが基本なんだけど分数を含んだグラフなんてかけない… (数学 III を勉強している人なら、グラフで解くこともできます)

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど、**分数関数の最大値、最小値は相加相乗平均を使って解くことが多い**ということを覚えておいてください。

学校では、相加相乗平均を使って解く最大値や最小値の問題はあまり勉強しないところが多いんですが、受験では相加相乗平均を使った最大値、最小値の問題は頻出です。

相加相乗平均については以下のプリントで解説しているので、あまり理解できていないなという人はコチラのプリントを参照して下さい。
http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku2B/2B-3.html

で、今回の問題も例にたがわず相加相乗平均を使って最小値を求めていくのですが、この問題は普通どおりの解き方ではうまくいきません。

相加相乗平均は $x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ というふうに和の形で表せれていて互いにかけ合わせたら消えてくれるときにしか使えません。

そこで、今回の $x^2+\dfrac{1}{4x}$ を見てみると x^2 と $\dfrac{1}{4x}$ 掛け合わせても変数が消えてくれません。

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど少しテクニックが必要です。と言っても知っているかどうかなので覚えてしまえば簡単です。どうするかと言えば、$\dfrac{1}{4x}=\dfrac{1}{8x}+\dfrac{1}{8x}$ っていうふうに式変形をするんです。

こうすると $x^2+\dfrac{1}{4x}=x^2+\dfrac{1}{8x}+\dfrac{1}{8x}$ となりますが、和の形で表されたものを互いにかけあわせてみると $x^2\cdot\dfrac{1}{8x}\cdot\dfrac{1}{8x}=\dfrac{1}{8^2}$ ってなって変数の x の値が消えてくれたよね？

この式変形って難関の私立大学の問題でたまにみかけます。知っていればごくごく簡単な内容だと思うので、こういった相加相乗平均の使い方も覚えておいてください。以上を踏まえて、答えに進みます。

【解答】

$xy = \dfrac{1}{4}$ より、$y = \dfrac{1}{4x}$

$z = \log_2(x^2 + y)$ は、真数の $x^2 + y$ が最小となるとき、z も最小となるので以下真数の $x^2 + y$ の最小値を考える。

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y \\
=&x^2 + \frac{1}{4x} \quad \blacktriangleleft\ y = \frac{1}{4x}\text{ を代入した} \\
=&x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} \quad \blacktriangleleft\ \text{強引に相加相乗平均を使える形にした} \\
\geqq& 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{8x} \cdot \frac{1}{8x}} \\
=&3\sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}} \\
=&\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

等号が成立するのは $x^2 = \dfrac{1}{8x}$ つまり $x = \dfrac{1}{2}$ のとき ◀ (注) を見よ

$x^2 + y$ は $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}$ ◀ $xy = \dfrac{1}{4}$ より $x = \dfrac{1}{2}$ のときの y の値を求めた。のとき最小となる。

よって、$z = \log_2(x^2 + y)$ は $x = y = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 3 - 2$ をとる。

(注)

相加相乗平均は、2個しか知らない人もいますが何個でも成立します。

相加相乗平均

$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ のとき、

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$ が成立する。

等号成立は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき

今回の問題では等号成立は上記で $n = 3$ のときで $a_1 = x^2,\ a_2 = \dfrac{1}{8x},\ a_3 = \dfrac{1}{8x}$ のときなので、$x^2 = \dfrac{1}{8x} = \dfrac{1}{8x}$ となります。

これで、今回のプリントは終わりです。２次関数の知識が三角関数や指数対数といった問題にどのようにつながるかということを重点的に解説しました。関数分野は高校数学でも最も重要な単元のひとつなのでしっかりと理解しておくようにしてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com