「同値変形について」

こんにちは、河見賢司です。今日は、同値変形について解説します。同値変形は多くの高校生が理解できていません。

ある程度の大学までなら、同値変形なんか考えずに適当に解いていても合格してしまうのが現実ですが、難易度の高い大学を目指すのなら同値変形をしっかりと理解しておかないといけません。そう聞くと、難しそうに感じるかもしれませんが、ごくごく簡単な内容です。数学にとって本当に重要なことなので、しっかりと理解しておいてください。

以前、次のように連立方程式を解きました。やや特殊な解き方をします。今回は、なぜそのように解くかという理由割愛します。理由を知りたいという人は http://www.hmg-gen.com/situmon/suugaku1A/1A-4.html に詳しく解説しています。

問題１

次の連立方程式を解け $\begin{cases} x^2+xy+1=0 \cdots ① \\ x^2+x+y=0 \cdots ② \end{cases}$

【解答】

① − ② = ③ とする。

$$\begin{array}{rl} & x^2+xy+1=0 \cdots ① \\ -) & x^2+x+y=0 \cdots ② \\ \hline & xy-x+1-y=0 \cdots ③ \end{array}$$

③ より

$$\begin{aligned} xy-x+1-y &= 0 \\ x(y-1)-(y-1) &= 0 \\ (x-1)(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

⇑ かけあわせて 0 ということは、$x-1$ か $y-1$ のどちらか一方が 0 ということです。

(i) $x-1=0$ つまり $x=1$ のとき

$x=1$ を ① に代入すると

$$1+y+1=0$$

$$y=-2$$

(ii) $y-1=0$ のとき
$y=1$ を ① に代入すると

$x^2+x+1=0$ となるが、これは実数解をもたないので不適。

以上より、$(x,y)=(1,-2)$

こういうふうに問題を解いたところ、生徒から以下のような質問を受けました。

質問

① に $x=1$ を代入して y の値を求めたんですけど、これって ② の式にも代入して、十分性を確認しなくていいのですか？

連立方程式は ①, ② が両方とも成立しないとダメなんですから、① だけでなく ② の式も成立しているということを確認しないといけないように感じます。

そうですね、確かにもっともな意見だと思いますが、結論から言うとこれは確認する必要はありません。

少し難しい話になりますが、本当に重要な内容です。数学を得点源にしたいという人はぜひとも読んでください。

まず、上の連立方程式はどのように解いたかというと ① − ② = ③ としました。

③ で $x=1, y=1$ が求まり、それを ① に代入して解いていきました。ということは、① と ③ の連立方程式を解いていったという感じだよね。

まず、③ = ① − ② なんだから {①, ②} $\Rightarrow$ {①, ③} ってことは言えるよね。

③ = ① − ② なんだから ① と ② が成立しているとき、当然 ① と ③ も成立している。

次に、{①, ③} $\Rightarrow$ {①, ②}っていうことも言えるんだ。なぜかというと ③ = ① − ② だから、これを式変形すると ② = ① − ③ が言えます。ということは、当然 ① と ③ が成立していたら ② も成立しているよね。

このふたつで、{①, ②} $\Rightarrow$ {①, ③}かつ{①, ②} $\Leftarrow$ {①, ③}が言えたことになります。

$A \Rightarrow B$ かつ $A \Leftarrow B$ が言えたら $A \Leftrightarrow B$ となります。$A \Leftrightarrow B$ とは A と B は同値ということです。同値とは、簡単にいえばまったく同じということです。だから、A が成立し

ているのなら B も成立しているし、逆に B が成立しているのなら A も成立しています。

今回は{①, ②} ⇔ {①, ③}より、{①, ②}と{①, ③}は同値となります。さっきの問題は{①, ③}で連立方程式を解きました。②が成立していることは確認しないでいいと言いましたが、この理由はここにあります。{①, ②}と{①, ③}は同値なので、{①, ③}が言えたら②は当然成立しているので、確認をする必要はありません。

今回のこの同値変形は、本当に重要なんです。次の問題を解いてみてください。

質問

$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$ と $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 4k = 0$ が接するという、このとき定数 k の値を求めよ

【解説】
この問題なんだけど、円と円が接する時だから中心間の距離と半径を見比べて…と解いていってもいいんだけど、少し面倒です。もちろん、こういうふうにしても解けますが。

でも、これもさっきの同値変形を使えばもっと簡単になるんじゃない？

$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0 \cdots$①, $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 4k = 0 \cdots$②とします。

① − ② = ③とします。① − ②を計算して整理すると、$4x - 3y + 2k - 3 = 0 \cdots$③となります。

これもさっきと同じように{①, ②} ⇔ {①, ③}が言えます。{①, ②}と{①, ③}は同値なので、当然{①, ②}が接するとき、{①, ③}も接します。

{①, ②}だったら円と円だから考えにくかったけど、{①, ③}だったら円と直線だから考えやすくなったんじゃない？では、これを使って問題を解いていきます。

【解答】
$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0 \cdots$①, $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 4k = 0 \cdots$②とする。

① − ② = ③とする。$4x + 3y + 2k - 3 = 0 \cdots$③となる。

{①, ②} ⇔ {①, ③}より、以下①と③が接する条件を考える。

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$$
$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$$

① は中心が $(-1, -3)$ で半径が 2 の円なので、① と ② が接するとき ② から中心 $(-1, -3)$ までの距離が 2 であればよい。

$$\frac{|4(-1)+3(-3)+2k-3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 2$$
$$\frac{|2k-16|}{5} = 2$$
$$|2k-16| = 10$$
$$2k-16 = \pm 10$$
$$2k = 6,\ 26$$
$$\therefore\ k = 3,\ 13$$ ◀ これが答え

これで、今回のプリントは終わりです。この同値変形なんですが、本来ならすべての高校生に理解してほしい内容なんですが、同値変形は何も考えずに適当に解いていても、案外成立しているのでそこまで考えなくてもほとんどの問題は解けてしまいます。

ある程度までの大学ならそれでいいのですが、難関大学ではそれでは対処しきれなくなります。同値変形は決して難しい内容ではないので、難関大学を目指すという人はしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com