$x=(x+1)-1$ とする計算法

こんにちは、河見賢司です。今回は、それほど頻出という訳ではありませんが、「こんな解法知らない」という声を立て続けに聞いたので紹介させてもらうことにします。

突然ですが、次の問題を解いてください。

問題

x についての恒等式 $(2x+1)^3 = a(x+1)^3 + b(x+1)^3 + c(x+1) + d$ が成り立つように $a, b\,c$ の値を求めよ

【解説】
「この問題を解いてみて」と言うと多くの人が、左辺も右辺も展開して計数比較で解こうとします。

まあ、そのやり方でも解けないことはないんですが面倒だよね？

で、何かいい方法はないかな？と考えるんですけど、右辺を見てみるとこれって $x+1$ の式だよね？ということは、この式は $x+1$ の恒等式とみなすこともできるんじゃないかな？

で、このことを頭にいれて考えると左辺の $2x+1 = 2(x+1)-1$ と強引に式変形をしたら左辺も $x+1$ の式になってくれるよね？こうすると簡単に計算することができます。

この手法はあまり知られていませんが、たまに出てきます。覚えておいてください。それでは、これを使って問題を解いていきます。

【解答】
(左辺 $= (2x+1)^3$

$= \left\{2(x+1)-1\right\}^3$ ◀ 強引に $x+1$ のみの式にした！

$= 8(x+1)^3 - 12(x+1)^2 + 6(x+1) - 1$

右辺と係数を比較して $a=8,\ b=-12,\ c=6,\ d=-1$

普通に展開をしたら面倒だったと思うけど、こういうふうに $x+1$ の式とみなすことで計算がかなり簡単になりました。覚えておくと、便利ですよね。

次に、またこれと同じような知識を使って解く問題を紹介したいと思います。

問題

x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ

【解説】
これは微分を使って解く有名な解法がありますが、まずは先ほどと同じような解き方で解いていきたいと思います。

x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ、という問題ですけど、$(x-1)^2$ を因数にもつときは当然 $(x-1)^2$ で割り切れるから、余りには影響しないよね？どういうことかと言うと、

例えば、$f(x)(x-1)^2+h(x)(x-1)^2+g(x)(x-1)^2+i(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めるとき、$f(x)(x-1)^2+h(x)(x-1)^2+g(x)(x-1)^2$ ここまでは、$(x-1)^2$ を因数に持つんだから、$f(x)(x-1)^2+h(x)(x-1)^2+g(x)(x-1)^2+i(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $i(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りと等しくなります。

このことを頭に入れて、問題を見てみると x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよという問題です。仮に $x^n-1=f(x)(x-1)^2+g(x)(x-1)^2+\cdots$ と式変形をできたとしたら、余りを簡単に求められるんじゃない？

x^n-1 ですが、-1 はほっておいて、x^n だけを考えます。これで何とか $(x-1)^2$ が出てくるように式変形をしたい･･･と考えるんだけど、思いつくかな？実は、これは $x^n=\{(x-1)+1\}^n$ と式変形をします。こう式変形をすると $(x-1)^2$ が出てくる形になってくれます。

$\{(x-1)+1\}^n$ の形をみたらパット気づけるようにしておいて欲しいんですけど、これは 2 項定理を使います。

$(\bigcirc+\bigcirc)^n$ の扱い方

問題を解いていて、$(\bigcirc+\bigcirc)^n$ が出てきたときは、ほとんどの場合 2 項定理を使って展開をする。

今回は $\{(x-1)+1\}^n$ です。$(\bigcirc+\bigcirc)^n$ を見たら、2 項定理を使うことが多いということを知っていればすぐに気づけます。

2 項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, a\, b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, b^n$$

では、$\left\{(x-1)+1\right\}^n$ を 2 項定理を使って展開していきたいと思います。

x^n

$=\left\{(x-1)+1\right\}^n$ ◀ $x=(x-1)+1$ として、強引に $x-1$ の式にした

$=(x-1)^n + {}_n\mathrm{C}_1(x-1)^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2}(x-1)^2 + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-1) + 1$ ◀ 2 項定理を使って展開をした

$=(x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + n(x-1) + 1$

問題は $x^n - 1$ を $(x-1)^2$ で割ったときでしたから $x^n - 1$ にしたいと思います。

$$\begin{aligned} x^n &= (x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + n(x-1) + 1 - 1 \\ &= (x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + n(x-1) \end{aligned}$$

2 項定理を使って $x^n - 1 = (x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + n(x-1)$ って式変形をすることができたけど、$x^n - 1$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは、$(x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2$ の部分は $(x-1)^2$ を因数にもつんだから $(x-1)^2$ で割り切れます。ということは、残った $n(x-1)$ が余りになるよね？この 2 項定理を使った手法もよく出てくるので、覚えて置いてください。

【解答】

$x^n - 1$

$=\left\{(x-1)+1\right\}^n - 1$ ◀ $x=(x-1)+1$ として、強引に $x-1$ の式にした

$=\left\{(x-1)^n + {}_n\mathrm{C}_1(x-1)^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2}(x-1)^2 + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-1) + 1\right\} - 1$ ◀ 2 項定理を使って展開をした

$=(x-1)^n + {}_n\mathrm{C}_1(x-1)^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_2(x-1)^2 + {}_n\mathrm{C}_1(x-1)$

$=(x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + n(x-1)$

ここで、$(x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}(x-1)^2$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので、x^n を $(x-1)^2$ で割った時の、余りは $n(x-1) = nx - n$ となる。

最初にも話しましたが、これには有名な別解があります。別解といいますか、これから話すほうが一般的な解法かもしれません。問題を解くには、厳密にいえば数学 III の微分の知識が必要になりますが、このくらいなら数学 II しか勉強をしない人も理解しておいた方がいいと思います。数学 III の内容ですが、次の事柄は覚えておいてください。

積の微分

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

では、この性質を使って問題を解いていきます。$f(x) = x^n - 1$ とする。$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $ax+b$ とする。

$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \cdots$①

$f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a \cdots$② ◀ 両辺を x で積分した

なぜ、微分をするかというと ①, ② 両方とも $x=1$ を代入すると、訳の分からない $Q(x)$ や $Q'(x)$ が消えてくれて a, b の関係式のみになってくれるよね？だから、微分をしました。

今回は、割り算がテーマではないので、詳しくは話しませんが $(x-a)^2$ で割ったときの余りは、微分を使って求めるということくらいは頭に入れておくようにしてください。

$(x-\alpha)^2$ の余りの求め方

$(x-\alpha)^2$ の余りを求める問題では、微分を使って余りを求める！

それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】
$f(x)=x^n-1$ とし、$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったとき、商を $Q(x)$、余りを $ax+b$ とする。

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b\cdots$①

$f'(x)=2(x-1)\,Q(x)+(x-1)^2\,Q'(x)+a\cdots$② ◀ 両辺を x で積分した

① より、
$f(1)=a+b$

$0=a+b\cdots$①$'$ ◀ $f(x)=x^n-1$ より $f(1)=1^n-1=0$

② より
$f'(1)=2(1-1)\,Q(1)+(1-1)^2\,Q'(1)+a$

$n=a$ ◀ $f'(x)=n\,x^{n-1}$ より $f'(1)=n$

①$'$ に $a=n$ を代入して $b=-n$

以上より、求める余りは $nx-n$ となる。

これで今回の解説プリントは終わりです。最初にも言いましたが、それほど頻出という訳ではありませんが、実際の大学受験でもたまに出てきます。これを知っていたらかなり時間短縮できます。

読んでもらえば分かる通り、ごくごく簡単な内容ですのでぜひとも理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com