こんにちは、河見賢司です。

いきなりなんですけど、次の問題を解いてください。

問題

(1) $x + \dfrac{1}{x} = X$ とする。このとき $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ を X を用いて表せ。

(2) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の実数解を求めよ。

【(1) の解説】
(1) は単なる対称式の問題です。もし分からないという人は、こちらのプリントで勉強しておいてください。

対称式のプリント：http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf

【(1) の解答】

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$ ◀ x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x \cdot \frac{1}{x}$$ ◀ 対称式の公式 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ に $a = X,\ b = \dfrac{1}{x}$ を代入した

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= X^2 - 2$$ ◀ $x + \dfrac{1}{x} = X$ を代入した。これが答え

【(2) の解説】
次に (2) を解いていくけど、どうしようかな？

4 次方程式を解くときは、組立除法を使って解いていくことが多いんだけど $x = \pm 1, \pm 2$ なんかを代入してみても答えが見つかりそうにない…どうも組立除法は使えそうにない。

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ってなんかきれいな形になってない？一番左側の項の x^4 の係数は 1、一番右側の定数項の値は 1、次に 2 番目を見てみると左から 2 番目の項の x^3 の係数は -2、右から 2 番目の項の x の係数は -2 となっていて係数が左右対称だよね？こういったときは、両辺を x^2 で割るとうまくいきます。

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$ ◀ 両辺を x^2 で割った

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の両辺を x^2 でわると、上記のように式変形されます。

(1) より、$X = x + \frac{1}{x}$ とおいたとき $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$ で表されるんだから、$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ は $(X^2 - 2) - 2X - 1 = 0$ って式変形できるんじゃない？これだったら、単なる 2 次方程式だから簡単に解けるよね。

(2) の問題は、ここまで式変形をできると簡単に解くことができます。今回、なぜこの問題を解説したかというとまず一つ目は、こういうふうに係数が対称な式のことを「**相反方程式**」といって、実際の大学受験にもたまに出題されます。最近では、２００８年のお茶の水大学にも出題されています。

「相反方程式」が出てきたときは、このように両辺を適当な文字で割り $x + \frac{1}{x}$ のみの式にしてから解いていくことが多いです。

そして、もう一つは次のことを覚えておいてほしいからです。

大学受験での考え方

> 大学受験の問題で、(1), (2) となっていれば (2) は (1) をヒントにして解いていくことが多い

このことは本当に重要なので、しっかりと覚えておいてください。特に、次の 2 パターンで使うことが多いです。

* **(1) と (2) の形が似ているとき**
* **(1) があまりにも簡単なとき**

(1) と (2) が似ているときは、(1) を少し変形したら (2) の式になることが多いので、(1) を使って解くことが多いです。

(1) と (2) の形が似ているときは、(1) を式変形していくのかな？と考えられるようにしておいてください。

そして、(1) があまりに簡単なときは、今回の問題もあてはまると思うのですが、実際の入試にあまりに簡単な問題が出題されることは少ないです。そういったときは、ほとんどがそれ以降の問題を解くヒントになっています。

出題者としては、(2) の問題に、〇〇を使って解けと問題文に記すにはあまりに親切すぎます。でも、ノーヒントでは少し難しいかな？ということで、わざわざヒントを与えてくれているのです。

今回の問題でも、(1) で $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ を X で表しました。まだ難しく感じる人もいるかもしれませんが、受験生ならほとんどの人が (1) は、確実に解ける問題です。そこで、なんでこんな簡単な問題が出題されたのかな？と考えるようにしてほしいのです。あまりに簡単な場合 (2) で (1) の結果を使うんだな、と気づけないといけません。(1) の結果を使うには、両辺を x^2 で割ったらいいのでは？と思いつくはずです。

相反方程式は、結構有名な式なので本来ならこの式を見た瞬間に解き方を思いついて欲しいのですが、もし忘れていたとしても (1) がヒントになっているんだな、と気づきこの問題くらいは解けるようにしておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】
$x^4 - 2x^2 - x^2 - 2x + 1 = 0 \cdots (*)$

$(*)$ に $x = 0$ を代入すると $(*)$ は不成立なので、$x \neq 0$ となるので、両辺を x^2 で割ると
⇑ 両辺を変数で割るときは、変数が 0 でないことを必ず確認する

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x - 1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$ ◀ 両辺を x^2 で割った
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$
$$(X^2 - 2) - 2X - 1 = 0$$ ◀ (1) の結果より $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = X^2 - 2$ と $x + \dfrac{1}{x} = X$ をそれぞれ代入
$$X^2 - 2X - 3 = 0$$
$$(X + 1)(X - 3) = 0$$
$$X = -1, 3$$

求めるのは x の値。X の値が -1 と 3 と求まったので、後は $X = x + \dfrac{1}{x}$ から x の値を求めれば、この問題は終了です。

(i) $X = 3$ のとき、

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$x^2 + 1 = 3x$ ◀ 両辺に x をかけて分数を払った

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$X = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2}$ ◀ 解の公式より

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(ii) $X = -1$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$x^2 + 1 = -x$ ◀ 両辺に x をかけて分数を払った

$$x^2 + x + 1 = 0$$

これの判別式を D とする。$D = 1 - 4 = -3 < 0$ より、解なし。

以上より、解は $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

今回は、相反方程式を紹介しました。相反方程式はもちろん覚えておいてほしいのですが、それ以上に重要なのは (2) は (1) を使って解くという手法です。

この前問を使って解くという方法は、大学受験において本当に重要になってきます。大学受験の問題は、解き方がなかなか思いつかない問題が多いです。そんなときでも、この問題を解くには、なんとかして前問の結果を使うんだと自分に言い聞かせて考えると、解法も思いつけるはずです。

こういった考え方は、まだ身についていない人も多いとは思いますが、のちのち重要になってくるので今日話したようなことをよく覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com