「2 次関数と x 軸との位置関係」

こんにちは、河見賢司です。今回は、「2 次関数と x 軸との位置関係」の話をしたいと思います。

「2 次関数と x 軸との位置関係」って、どんなんだろう？と思った人もいると思いますが、最終的には次のような問題を解けることを目的とします。

問題

すべての x に対して、$ax^2 - x + a > 0$ が成立するような a の値の範囲を求めよ

本当に基礎的な問題かもしれないんですけど、こういった問題を理解できていない人が多いです。という僕も、高校 1 年生のときは理解できていなかったと思います。

この問題を解くには、判別式が必要です。判別式についてまず説明をしたいと思います。まず、判別式については次の事柄を覚えてください。

判別式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とする。ただし $D = b^2 - 4ac$

(i) $D > 0$ のとき、2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ
(ii) $D = 0$ のとき、2 次方程式は 1 つの実数解 (重解) をもつ
(iii) $D < 0$ のとき、2 次方程式は実数解をもたない

判別式については、こちらのページでも紹介しているので勉強をしたいという人はこちらのページも見てください。http://www.hmg-gen.com/kaitou1-10.pdf

前回は式で説明をしましたが、今回はグラフで説明をしたいと思います。

$D > 0$ のとき、$ax^2 + bx + c = 0$ は 2 解をもちます。ということは、$y = ax^2 + bx + c$ と $y = 0$ のふたつのグラフが 2 点で交わります。
⇑ これが理解できないという人は、次のことを思い出したらいいと思います。例えば $y = x^2 + 2x - 3$ と $y = 0$ の交点を求めなさいと言えば、y を消去して $x^2 + 2x - 3 = 0$ ってするよね？

これを逆に元に戻したら、$x^2 + 2x - 3 = 0$ は $y = x^2 + 2x - 3$ と $y = 0$ との交点を求めるってことになるよね。

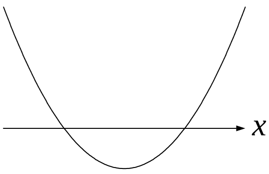
ちょっと適当な説明だけどこれで理解できると思います。

2 次関数は下に凸なときと、上に凸なときの 2 通りの形があります。下に凸か、上に凸かは 2 次関数の x^2 の係数の正負によってきまります。正のときは下に凸な 2 次関数、負のときは上に凸な 2 次関数となります。

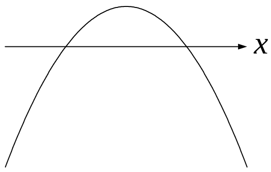
今回は、$y = ax^2 + bx + c$ とおいたので、x^2 の係数は a です。よって、$a > 0$ のときは、下に凸な 2 次関数、$a < 0$ のときは、上に凸な 2 次関数となります。

以上を踏まえて、$D > 0$ を図示すると、次のようになります。

(i) $a > 0$ のとき

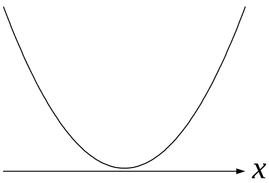


(ii) $a < 0$ のとき

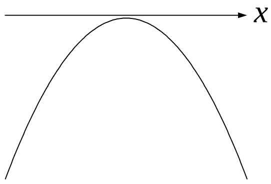


次に、$D = 0$ のときを、考えます。$D = 0$ とは、2 次関数と x 軸とが接するときです。これも、$a > 0$ か $a < 0$ で 2 通りの場合が考えられます。

(i) $a > 0$ のとき

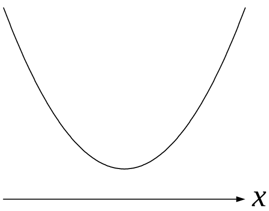


(ii) $a < 0$ のとき

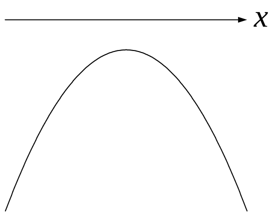


最後に $D < 0$ のときです。$D < 0$ は 2 次関数と x 軸との交点がないときだから、

(i) $a > 0$ のとき



(ii) $a < 0$ のとき

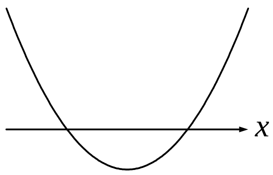


以上より、これまでの事柄をまとめると２次関数と x 軸との位置関係は次の６通りになります。

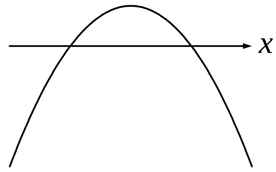
2 次関数と x 軸との位置関係

(I) $D > 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき

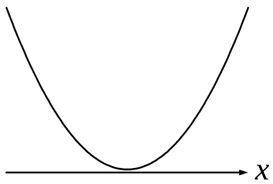


(ii) $a < 0$ のとき

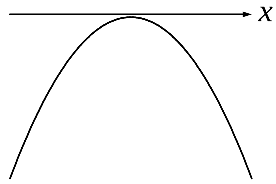


(II) $D = 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき

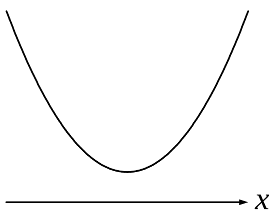


(ii) $a < 0$ のとき

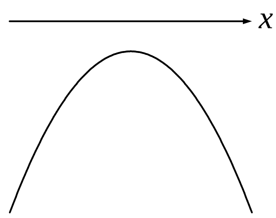


(III) $D < 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき



(ii) $a < 0$ のとき



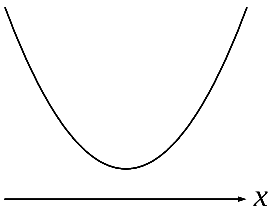
このことを踏まえて、最初に載せていた問題を実際に解いてみたいと思います。

問題

すべての x に対して、$ax^2 - x + a > 0$ が成立するような a の値の範囲を求めよ

【解説】
この問題は少し難しく感じるかもしれませんが、これまで解説してきた内容さえ理解できていれば簡単だと思います。

$ax^2 - x + a > 0$ とは、$y = ax^2 + x + a$ が $y = 0$ より常に上側にあるということです。先ほど６パターンに分けましたが、x の値にかかわらずすべて上側になるのは次のパターンです。



上記のようになるのは $a > 0$ かつ $D < 0$ のときです。これだけで、問題を解くことができます。理解できていない人が多いですが理解さえできたら簡単です。しっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】
$ax^2 - x + a = 0$ の判別式を D とする。
⇑ たまに「$ax^2 - x + a > 0$ の判別式を D とすると」と書いたり、この問題ではないけど「$y = ax^2 + bx + c$ の判別式を D とすると」、なんて書いている人がいるけどこれはダメです。

判別式は 2 次方程式の実数解の個数を判別するものなので、2 次方程式 ($ax^2 + bx + c = 0$ の形をしたもの) 以外は、判別式はないですよ

すべての x に対して、$ax^2 - x + a > 0$ が成立するには $a > 0$ かつ $D < 0$ であればよい。

$$D = (-1)^2 - 4a \cdot a < 0$$
$$4a^2 - 1 > 0$$
$$(2a+1)(2a-1) > 0$$
$$\therefore\ a < -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < a$$

⇑2次不等式の解き方が分からないという人は、http://www.hmg-gen.com/tecni1a-6.pdf を見てください

よって、求める a の値の範囲は $a > 0$ かつ $a < -\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2} < a$ なので、

$a > \frac{1}{2}$ となる。◀ これが答え

こういった「x 軸と放物線の位置関係に関する問題」は理解できたでしょうか？それでは、こういったタイプの問題をもう一問、解いてもらいます。

問題

放物線 $y = (a-1)x^2 + (a+1)x + a$ と直線 $y = x + 1$ がある。放物線が直線よりつねに下側にあるような a の値の範囲を求めよ。

【解説】
「放物線と直線の位置関係なんて分からないよ」と言う人がいますが、放物線と直線そのまま考えることはないですよ。

放物線が直線の常に下側と言うことは、すべての x において次の不等式が成立するばOKです。

$(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$

$(a-1)x^2 + (a+1)x + a - x - 1 < 0$ ◀ 右辺の $x+1$ を左辺に移項した

$(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$

$(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ を式変形をしたら、$(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ になりました。少し難しい言い方をすれば、同値変形していった結果 $(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ が $(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ になったので、$(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ と $(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ は同値、まったく同じと言うことです。

問題は、「常に $(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ を満たす a の値の範囲を求めよ」でしたが $(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ と $(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ は同値なので、「常に $(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ を満たす a の値の範囲を求めよ」となります。

これなら、2次関数と x 軸との位置関係なので、さっきと同じように考えることができるよね？

少し長々と説明しました。くどいと感じた人もいるかもしれませんが、理解できていない人も多いので少々長めに説明しました。それでは、解答に進みます。

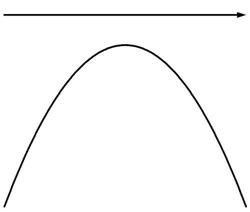
【解答】
放物線 $y = (a-1)x^2 + (a+1)x + a$ と直線 $y = x + 1$ がある。放物線が直線よりつねに下側にあるためには、全ての x で $(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$ が成立すればよい。

$(a-1)x^2 + (a+1)x + a < x + 1$

$(a-1)x^2 + (a+1)x + a - x - 1 < 0$ ◀ 右辺の $x+1$ を左辺に移項した

$(a-1)x^2 + ax + a - 1 < 0$

上記が任意の x について成立するには次のようになればよい。



$(a-1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ の判別式を D とすると、$a - 1 < 0$ かつ $D < 0$ であればよい。
⇑ 上に凸で、x 軸との交点なし。つまり解なしとなるのは $D < 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
D = a^2 - 4(a-1)\cdot(a-1) &< 0 \\
a^2 - 4(a^2 - 2a + 1) &< 0 \\
a^2 - 4a^2 + 8a - 4 &< 0 \\
-3a^2 + 8a - 4 &< 0 \\
3a^2 - 8a + 4 &> 0 \\
(a-2)(3a-2) &> 0 \\
a < \frac{2}{3} \quad 2 &< a
\end{aligned}
$$

$a - 1 < 0$ を考え、求める範囲は $a < \dfrac{2}{3}$ となる。 ◀ これが答え

今回の問題は、これで終了です。最初にも言いましたが意外に理解できていない人が多いです。あなたもそうだったかもしれませんが、このタイプの問題は本当に重要です。慣れてくると、簡単なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com