

## 「絶対値を含む不等式の計算」

こんにちは、河見賢司です。今回は、絶対値を含む不等式の計算をグラフで考えるという手法を解説したいと思います。

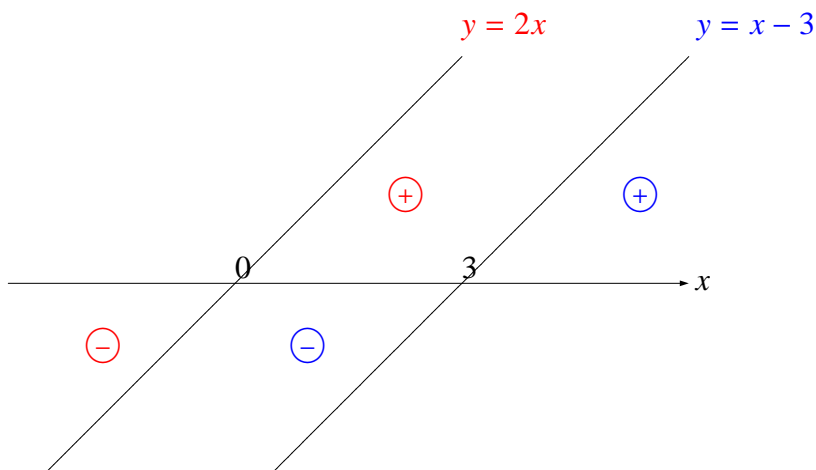
不等式をグラフで考えるという手法を知らない人は、<http://www.hmg-gen.com/tecni1a-6.pdf> をご覧ください。2次不等式をグラフを使って解いています。このプリントを見れば、不等式をグラフで考えるという手法が分かると思います。

いきなりですが、次の問題を解いてください。

$$|2x| + |x - 3| < 4 \text{ を解け}$$

### 【解説】

上記の問題では絶対値を外す必要があります。絶対値の外し方は数直線などいろいろありますが、以下のようにグラフを使って解くのが一番ラクだと思います。



(注) ↑本来なら  $y = 2x$  と  $y = x$  とは傾きが違うので、上記のようにはならないが、絶対値は正負さえわかればいい(つまり  $x$  軸より上にあるかどうか)なので、傾きは正負に影響しないので適当にかきました。

上記のグラフを見れば、絶対値の正負は一目瞭然です。

$x \leq 0$  のとき、  $2x \leq 0, x - 3 \leq 0$   
 $0 \leq x \leq 3$  のとき、  $2x \geq 0, x - 3 \leq 0$   
 $3 \leq x$  のとき、  $2x \geq 0, x - 3 \geq 0$  となります。

「このくらいなら、頭の中でもできるよ」と思う人もいます。確かにそうです。ですが、正負を判断するのはこういうふうにグラフをかくのが視覚的に分かるので間違いにくいということを覚えておいてください。

では、問題に戻ります。問題を解いてくださいというと、次のように解くことが多いです。

**【解答】**

(i)  $x \leq 0$  のとき、 $2x \geq 0$ ,  $x - 3 \leq 0$  となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$-2x - (x - 3) < 4$$

$$-3x < 1$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$x \leq 0$  と  $x > -\frac{1}{3}$  をあわせて  $-\frac{1}{3} < x \leq 0$  となる

(ii)  $0 \leq x \leq 3$  のとき、 $2x \geq 0$ ,  $x - 3 \leq 0$  となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$2x - (x - 3) < 4$$

$$x < 1$$

$0 \leq x \leq 3$  と  $x < 1$  をあわせて  $0 \leq x < 1$  となる。

(iii)  $3 \leq x$  のとき、 $2x \geq 0$ ,  $x - 3 \geq 0$  となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$2x + x - 3 < 4$$

$$3x < 7$$

$$x < \frac{7}{3}$$

$x \geq 3$  より  $x < \frac{7}{3}$  となることはないので、この場合解なし。

以上より、 $-\frac{1}{3} < x \leq 0$  または  $0 \leq x < 1$  なので、これをあわせて  $-\frac{1}{3} < x < 1$  となる。

もちろん上記の解き方でもいいんですけど、グラフを使ったほうがよりはやく解くことができます。数式で解くと計算間違いに気付きにくいですが、グラフを使って解くと計算間違いに気付きやすいと思います。

今回のように、絶対値が2つ以上含まれる不等式はグラフで考えた方がいいです。

### 【解説】

$|2x| + |x - 3| < 4$  とは、 $y = |2x| + |x - 3|$  のグラフと  $y = 4$  のグラフをかき、 $y = |2x| + |x - 3|$  のグラフの方が  $y = 4$  のグラフより下側にあるような  $x$  の値の範囲を求めなさいよ、ということです。

で、 $y = |2x| + |x - 3|$  なんですが、まじめにかいてもいいのですが、次のように考えるのがはやいです。

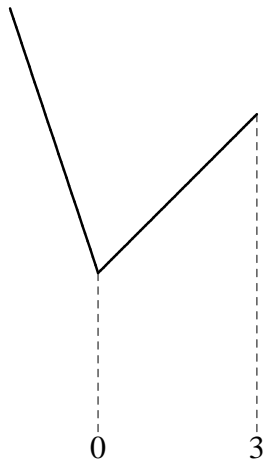
$y = |2x| + |x - 3|$  は絶対値を外すと1次関数です。1次関数は傾きさえ分かれば、グラフの概形はわかります。

まず、 $x \leq 0$  のとき、両方ともマイナスなので  $x$  の係数は  $-3$  となります。 $x$  の係数は傾きを表すので、 $x \leq 0$  では傾きが  $-3$  の1次関数となります。

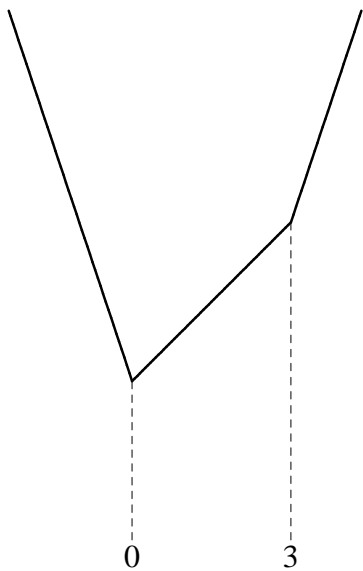


↑  $x \leq 0$  で傾き  $-3$  の直線をかいた

これと同じように次は、 $0 \leq x \leq 3$  のときです。このとき  $2x \geq 0$ ,  $x - 3 \leq 0$  なので、 $x$  の係数だけに注目すると、1になります。これが直線の傾きになります。また、絶対値のグラフはつながっていることを考えて、さきほどのグラフにかき加えます。

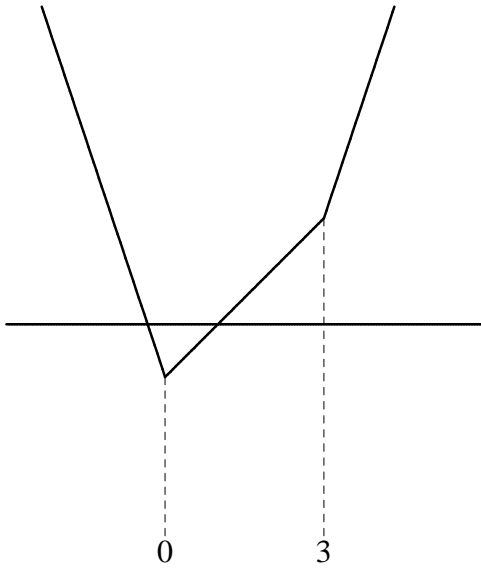


最後に、 $3 \leq x$  のときです。このとき  $2x \geq 0, x-3 \geq 0$  なので、先ほどと同じように  $x$  の係数に着目すると、 $x$  の係数は3になります。これが傾きなので、このことを考えてグラフをかくと



絶対値のグラフは上記のようになります。

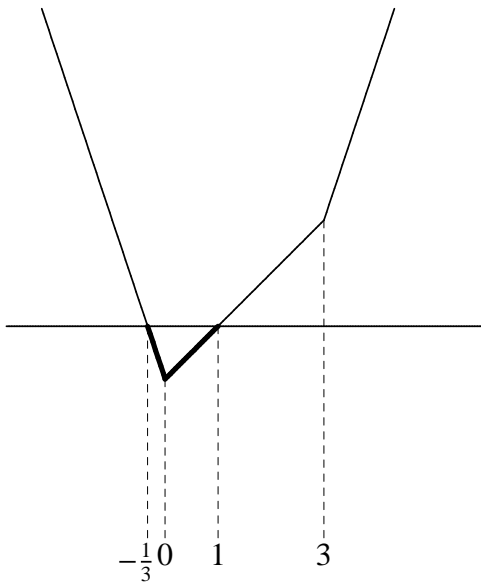
後は、絶対値のグラフと  $y = 4$  のグラフの上下関係を知りたいのですが、 $x = 0$  のときの  $y = |2x| + |x-3|$  の  $y$  の値を求めると  $y = 3$  となり、 $x = 3$  のときの  $y$  の値を求めると  $y = 6$  となることから  $y = 4$  のグラフは次のような位置にあります。



後は、このグラフを使って問題を解いていくだけです。それでは、解答に進みます。

【解答】

$y = |2x| + |x - 4|$  と  $y = 4$  のグラフをかくと以下の通り、



グラフより、 $-\frac{1}{3} < x < 1$  となる。◀これが答え

上記の交点は、最初の解答と同じようにして計算しています。

今回ははじめてなのでグラフをかくのに時間がかかりましたが、慣れてくるとこんなのは一瞬でかくことができるようになります。

今回の問題では、 $3 \leq x$ では解なしですが、これはグラフを考えずに数式で解く手法では解くしかありません。解いたうえで、解なしということに気づきます。ところが、グラフで考える手法だと、解く前からグラフから解なしということが分かります。

簡単な問題だと別にいいのですが、難しい問題になるとグラフで考えるといった手法が必要になってきます。グラフは、視覚的に判断できるので数式では分かりにくい問題もすぐに理解できることがあります。

現段階ではそれほどグラフで考える必要性を感じないという人も、今後必要になってきます。ぜひとも、このグラフで考えると言う手法をしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)