「三角比を含んだ最大値、最小値の考え方」

こんにちは、河見賢司です。今回は、「三角比を含んだ最大値、最小値の考え方」として数学 I の三角比の最大値、最小値問題を解説したいと思います。

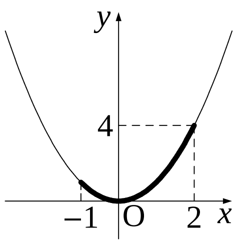
最大値、最小値問題は本当に基本的なことなんですが理解できていないという人が本当に多いです。かなり詳しく説明します。今回のプリントは、数学が苦手だという人に特に読んでほしい内容です。それでは、がんばっていきましょう。

問題

$y = 4\cos x - \sin^2 x + 2\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と最小値とそれらを与える θ の値を求めよ

【解説】
まず、この問題は関数の最大値、最小値だよね？関数の最大値、最小値の基本はグラフをかいて考えるということです。

中学生のときによくやった問題だと思いますけど、「$y = x^2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ の値域を求めよ」という問題で、あなたもやってしまったかもしれないけど、$x = -1$ を $y = x^2$ に代入して $y = 1$、$x = 2$ を $y = x^2$ に代入して $y = 4$ となるから、求める値域は $1 \leqq y \leqq 4$ となる。これって典型的な間違いだったよね？これが間違っているという理由はグラフをかくと分かると思います。



グラフより、$x = 0$ のとき最小値 0、$x = 2$ のとき最大値 4 をとる。よって求める値域は $0 \leqq y \leqq 4$ となる。

これで、分かったと思うけど関数の最大値、最小値問題はグラフをかくと、視覚的にみることができるので間違いが少なくなります。

たまに、「頭の中でも分かるから」といった理由で、グラフをかかない人がいます。慣れてくると別にいいとは思いますが、まだ１年生のうちはどんなに簡単な問題でも、グラ

フをかいた方がいいと思います。

関数の最大値、最小値問題の考え方

関数の最大値、最小値問題ではグラフをかいて考える！

で、この考えを元にもう一度先ほどの問題を見てみるけど、

問題

$y = 4\cos x - \sin^2 x + 2$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と最小値とそれらを与える θ の値を求めよ

関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるのが基本っていうけど、$y = 4\cos x - \sin^2 x + 2$ のグラフなんてかけないよね？だから、どうしようかな？と考えるんだけど…そこで、次のことを覚えておいてください。

数学の鉄則

数学では変数(文字)が多ければ多いほどとにかく考えにくい、何かひとつの変数(文字)に統一できるときは統一してから考える。

⇑この考えは本当に重要です。しっかりと、しっかりと理解しておいてください。

で、この考えを元にして $y = 4\cos x - \sin^2 x + 2$ を見てみると、この中に変数は $\cos x$ と $\sin x$ の 2 種類だよね？ 2 種類だったら考えにくいので、どうにかして 1 種類に統一したいんだけどどうしようかな？

$\cos x$ の方は変更のしようがないけど、$\sin^2 x$ の方は $\cos x$ のみの式にすることができるんじゃない？なぜかと言うと $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ という三角比の相互関係の式より $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ という式が出てきます。

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を $y = 4\cos x - \sin^2 x + 1$ に代入すると、$y = 4\cos x - (1 - \cos^2 x) + 2$ になります。これだったら変数が $\cos x$ のみの式になって考えやすくなったよね？数学の問題を見たら、「**何かひとつの変数に統一できないか？**」ということを考えておいてください。

特に、三角比の場合 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ という相互関係の式を使って、$\sin x$ のみの式あるいは $\cos x$ のみの式にすることが多いです。このことは、重要なのでまとめておきます。

三角比を含む最大値、最小値問題の考え方

三角比を含む最大値、最小値問題では $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ という三角比の相互関係の式を使って、与式を $\sin x$ のみ、あるいは $\cos x$ のみの式にすることが多い！

それでは、問題に戻ります。上記のような考え方に基づいてとりあえず

$y = 4\cos x - \sin^2 x + 2$

$= 4\cos x - (1 - \cos^2 x) + 2$ ◀ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を代入した！

$= 4\cos x - 1 + \cos^2 x + 2$

$= \cos^2 x + 4\cos x + 1$

「変数を統一する」という知識に従ってとりあえずここまで式変形できました。関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるということが基本だったけど、$y = \cos^2 x + 4\cos x + 1$ のグラフなんてかけないよね？

そこで、文字の置き換えが出てきます。$y = \cos^2 x + 4\cos x + 1$ は $\cos x$ のみの式だよね？ということは $\cos x = t$ とでも置き換えたら $y = t^2 + 4t + 1$ ってなるんじゃない？$y = t^2 + 4t + 1$ だったら単なる 2 次関数だから簡単にグラフをかくことができるよね？

ただ、文字を置き換えた時は次の事柄に注意するようにしてください。

文字を置き換えた時の注意点

文字を置き換えた時は、必ず置き換えた文字の範囲に注意する！

これは、本当に重要だからしっかりと理解しておいてください。今後、どんどん数学は難しくなってきますが文字の置き換えをしたときは「**置き換えた時は範囲に注意**」とすぐに頭の中で浮かぶようになっておいてください。

で、今回なんですけど $t = \cos x$ と文字を置き換えました。ここで、$\cos x$ の値の範囲を考えてみることにします。今回は $0 \leqq x \leqq \pi$ という範囲です。このとき、$\cos x$ の値の範囲は $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ です。

$\cos x$ には $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ という値の範囲があります。$\cos x = t$ って置き換えたんだけど $\cos x = t$ と $\cos x$ と t が等しいんだから、$\cos x$ に $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ という値の範囲があるとき、当然 t にも $-1 \leqq t \leqq 1$ という値の範囲がついてきます。($\cos x$ と t が等しいんだから、考えたら当たり前だよね？)。

これらのことから、次のようなことが言えます。

$y = \cos^2 x + 4\cos x + 1$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ のおける最大値、最小値

は、以下と一致します。

$y = t^2 + 4t + 1$ の $-1 \leqq t \leqq 1$ のおける最大値、最小値

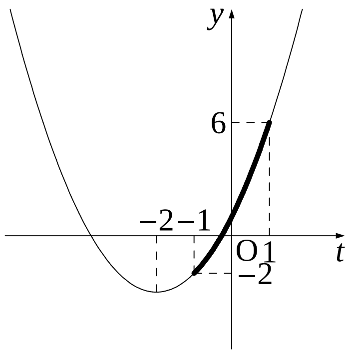
ここまできたら単なる 2 次関数の最大値、最小値問題なので簡単に解けると思います。今回は、三角比を含んだ最大値、最小値を解説しましたが、他の単元でも本当に同じように解くことができます。それだけ、今回の考えは重要です。しっかりと理解しておいてください。

【解答】

$$y = 4\cos x - \sin^2 x + 2$$
$$= 4\cos x - (1 - \cos^2 x) + 2$$
$$= \cos^2 x + 4\cos x + 1$$

ここで $\cos x = t$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ となる。

$$y = t^2 + 4t + 1$$
$$= (t+2)^2 - 3$$



グラフより、$t = -1$ のとき最小値 -2 をとり、$t = 1$ のとき最大値 6 をとる。

また、$t = \cos x$ より $t = -1$ のとき $x = \pi$、$t = 1$ のとき $x = 0$ となる。

以上より、$x = \pi$ のとき最小値 -2 をとり、$x = 0$ のとき最大値 6 をとる。

これで、今回の解説プリントは終わりです。今回の内容は本当に、本当に重要です。しっかりと理解しておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはコチラまで (何か言ってくれると嬉しいです)
magdai@hmg-gen.com/