
「文字式を変形するのは大変！」

こんにちは、河見賢司です。今回のテーマは、「文字式を変形するのは大変！」です。

なんか変なタイトルだな、と思っている人も多いとは思いますが、次のことは覚えておいてください。

数学は文字式を変形するのは大変。文字式の変形をする前に何か簡単な方法はないかな？と考えるようにしよう

実際に解いてもらえば分かると思うけど、文字式の計算ってしんどいんです。数のみの計算の方が圧倒的にラク。で、数学の問題って少し工夫することで、文字式を計算するのではなく、数のみの計算ですむことって以外に多いんです。どういった場合があるのか、実際に問題を解きながら説明をしたいと思います。

問題１

２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを x 軸方向に関して対称移動し、さらにそれを x 軸方向に -1、y 軸方向に 3 だけ平行移動したところ $y = 2x^2$ のグラフが得られた、このとき a, b, c の値を求めよ。

【解説】

この問題を、やってもらうと多くの人が、$y = ax^2 + bx + c$ を x 軸対称して、それを x 軸と y 軸方向に平行移動したものが $y = 2x^2$ と一致するので $\cdots$ と解いていくと思います。

もちろん、このやり方でも解けないことないけどそれでは、この解法って少し面倒です。そこで、逆から考えることにします。

$y = ax^2 + bx + c$ を x 軸対称して、それを x 軸方向に -1、y 軸方向に 3 だけ平行移動したら $y = 2x^2$ になったということを、逆からたどれば、

$y = 2x^2$ を x 軸方向に $+1$、y 軸方向に -3 だけ平行移動してさらに、それを x 軸対称移動したら $y = ax^2 + bx + c$ になるんじゃない？

これだったら、$y = 2x^2$ を式変形をしていくんだから、文字式の変形はまったくしなくていいよね。それでは、解答に進みます。

【解答】

$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+1$、y 軸方向に -3 平行移動して、さらに x 軸対称移動したものが $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと一致する。

$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+1$、y 軸方向に -3 平行移動したものは $y-(-3) = 2(x-1)^2$ ⇐ 曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に $+p$、y 軸方向に $+q$ 平行移動させたものは $y - q = f(x - p)$ である。

$$y - (-3) = 2(x - 1)^2$$

$$y = 2x^2 - 4x - 1$$

さらに $y = 2x^2 - 4x - 1$ のグラフをを x 軸対称移動すると $-y = 2x^2 - 4x - 1$ ⇐ $y = f(x)$ を x 軸対称移動すると $-y = f(x)$ となる

$$-y = 2x^2 - 4x - 1$$

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$

これが $y = ax^2 + bx + c$ と一致するので $\boldsymbol{a = -2,\ b = 4,\ c = 1}$ ◀ これが答え

最初に書いたように $y = ax^2 + bx + c$ を変形するやり方でもできないことないけど、今回の解答に比べたらかなり計算が面倒だと思います。

こういうことを説明すると、よく「どうやったら気づけますか？」と質問されます。これには「気づいてね」としか言いようがないんですけど、

少しポイントとして「数学の問題って単に面倒なだけの問題が出題されることって本当

に少ないんです。ですから、問題を解いて『この解き方だったらできるけど、少し面倒だな』と思えるときは、何か他の解き方がないか考えるようにしてください」

今回の問題も、問題を見た瞬間は「$y = ax^2 + bx + c$ を式変形していくのかな？」と思います。でも、そのときに「少し面倒だな。何か他の解き方はないかな？」と考えられるようにしておいて欲しいのです。

この考えができるようになると、気づけるようになります。

それでは、似たような考え方が必要な問題を解いてもらいます。先ほどの問題に関しては、勘のいい人は予備知識がなくても気づけるかもしれませんが、今回の問題は知らない人は無理だと思います。

解説を読んで、「こんな解き方もあるのだな」と思えるようにしてください。

問題２

$x^3 - x^2 + x - 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ は恒等式である。このとき、a, b, c, d の値を求めよ。

【解説】

これも「解いてください」というと右辺を変形していくと思うけど、ちょっと面倒だよね？そこで、何かないかな？と思うんだけど、これは左辺を式変形していきます。

どういうことかと言うと、よく見ると右辺は $(x-1)$ のみ式だよね。ということは x で整理するんじゃなくて、$x-1$ で整理していくと右辺は計算しなくてよく、左辺のみを式変形をして言ったらいいんじゃない？

$x = (x-1) + 1$ と式変形をすると、x を $x-1$ の式とみなすことができます。こんなの知らなかったら、まず思いつけないと思うけど、これは意外によく出る手法なので知らなかったという人は覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^3 - x^2 + x - 1 \\
&= \{(x-1)+1\}^3 - \{(x-1)+1\}^2 + (x-1) \quad \blacktriangleleft\ x = (x-1)+1 \text{ として、} x-1 \text{ のみの式とした} \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 - (x-1)^2 - 2(x-1) - 1 + (x-1) \\
&= (x-1)^3 + 2(x-1)^2 + 2(x-1)
\end{aligned}
$$

右辺と左辺の係数を比較すると、$\boldsymbol{a = 1,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 0}$ ◀ これが答え

先ほど、$x = (x-1)+1$ という式変形はよくするので、覚えておいてくださいという話をしました。「どんなときに使うの？」と思った人もいると思うので、今回の「文字式の変形は大変！」の趣旨から離れますが、一問ほど紹介したいと思います。問題の範囲としては数学 II ですので、まだ数学 II を勉強していない人は読み飛ばしてもらってかまいません。

問題 3

x^{100} を $(x-1)^2$ で割ったときの、余りを求めよ

【解説】

まずは、一般的な解法からで、$(x-1)+1$ を使う解法は後で紹介したいと思います。

これは、微分を使って解いていきます。「割り算に微分を使う？」なんて思う人もいるとは思いますが、有名な解法なのでぜひとも理解しておいてください。

$(x-\alpha)^2$ の割り算

$(x-\alpha)^2$ で割ったときの余りを求めるときは、微分を使って解く！

この解法は厳密にいえば、積の微分を使うので範囲としては数学 III ですが、数学 II B までしか勉強をしない人も覚えておいた方がいいと思います。

まず、積の微分と言っても数学 III の勉強をしていない人は知らないと思うので、次の事柄だけは覚えておいてください。

積の微分

$f(x)\,g(x)$ を微分すると $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ となる。

それでは、これを使った解答に進みたいと思います。

【解答】

x^{100} を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $ax+b$ とする。

$x^{100} = (x-1)^2\,Q(x) + ax + b \cdots$ ①

両辺を x で微分すると

$100x^{99} = 2(x-1)\,Q(x) + (x-1)^2\,Q'(x) + a \cdots$ ② ◀ 積の微分を使った

② に $x = 1$ を代入すると

$100 \cdot 1^{99} = 2(1-1)\,Q(1) + (1-1)^2\,Q'(1) + a$

$100 = a$

① に $a = 100,\ x = 1$ を代入すると

$1^{100} = (1-1)^2\,Q'(1) + 100 + b$

$1 = 100 + b$

$b = -99$

よって、余りは **$100x - 99$** である。

上記のように解くのが一般的な解法だと思いますが、次に $x = (x-1) + 1$ を使った解法で解いていきたいと思います。

この解法は 2 項定理の知識を使います。 2 項定理をまったく知らないという人は、こちらのページで勉強して下さい。http://www.hmg-gen.com/kaitou1-19.pdf

$x^{100} = \{(x-1)+1\}^{100}$ を 2 項定理を使って展開をすると、

$\{(x-1)+1\}^{100} = {}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)^{100} + {}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^{99} + \cdots + {}_{100}\mathrm{C}_3(x-1)^3 + {}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^2 + {}_{100}\mathrm{C}_1(x-1) + 1$

となります。

ところが ${}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)^{100} + {}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^{99} + \cdots + {}_{100}\mathrm{C}_3(x-1)^3 + {}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^2 + {}_{100}\mathrm{C}_1(x-1) + 1$

の青色の部分は $(x-1)^2$ で割り切れます。

従って、余りは ${}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)+1=100x-99$ となります。

【解答】

$\{(x-1)+1\}^{100}={}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)^{100}+{}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^{99}+\cdots+{}_{100}\mathrm{C}_3(x-1)^3+{}_{100}\mathrm{C}_2(x-1)^2+{}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)+1$ より、

余りは ${}_{100}\mathrm{C}_1(x-1)+1=\mathbf{100\boldsymbol{x}-99}$ となる。

いきなり「$x=(x-1)+1$ なんだよ」って言われても、「こんなの気付かないよ」と思う人も多いと思います。僕も、そうでした (笑)。だからこそ、覚えるしかないんです。よく出てくるので覚えておいてください。

それでは、今回のラストの問題です。

問題 4

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1,0),(4,0)$ と交わり、さらに点 $(0,-8)$ を通る。このとき、a,b,c の値を求めよ

【解説】

2 次関数の決定の問題です。この問題を「解いてみて」というと多くの人が、$y=ax^2+bx+c$ は $(1,0)$ を通るので、$0=a+b+c\cdots$ なんてして解いていきます。

もちろん、このやり方でもできないことはないんですけど、少し面倒です。普通、2 次関数が x 軸と 2 点 $(\alpha,0),(\beta,0)$ と交わるときたら 2 次関数は $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおいて解いていくよね？⇐ よくでてきます。知らなかったという人は覚えておいてください。

$y=ax^2+bx+c$ が与えられているからと言って、別に $y=ax^2+bx+c$ を変形していく必要はないです。いつもと同じように $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ で 2 次関数を求めて、それが $y=ax^2+bx+c$ って解いていったらいいんじゃない？

人によっては少し気づきにくいという人もいるとは思います。でも、こういうことを常に意識していたらできるようになりますので、普段から常に意識するようにしてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$(1, 0), (4, 0)$ と交わるので、求める 2 次関数は $y = A(x-1)(x-4)$ とおける。

さらに 2 次関数のグラフが $(0, -8)$ を通るので、

$-8 = A(0-1)(0-4)$ より $A = -2$

よって、求める 2 次関数の方程式は
$y = -2(x-1)(x-4)$

$= -2(x^2 - 5x + 4)$

$= -2x^2 + 10x - 8$

これが、$y = ax^2 + bx + c$ と一致するので、$\boldsymbol{a = -2,\ b = 10,\ c = -8}$ ◀ これが答え

今回のところはどうだったでしょうか？今回話したようなことを解説している参考書や問題集はあまりありません。

数学のできる人にとって今回話すような内容は当たり前すぎて、書く必要がないと思っているのだと思います。

でも、受験生時代の僕もそうでしたし、今数学を教えていて多くの高校生でもそうですが、こういったことをしっかりと理解できている人は本当に少ないです。

「文字式の変形は大変！」と言っても、最初のうちはなかなか気づけずに面倒な解き方をすることも多いと思います。それでも、「**面倒なときは、何か別の解き方はないかな？**」と常に、自分自身に言い聞かせて解くようにしてください。そうすれば、自然と気づけるようになってきますよ。それでは、がんばってください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司