

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

「 $\sqrt{A} = B$ の同値変形について」

こんにちは、河見賢司です。今回のテーマは、「 $\sqrt{A} = B$ の同値変形について」です。いきなりですが、次の方程式の間違い探しをしてください。

$$2(1-p) = \sqrt{2} \sqrt{1+p^2}$$

$$4(1-p)^2 = 2(1+p^2) \quad \blacktriangleleft \text{両辺を2乗した}$$

$$2(p^2 - 2p + 1) = 1 + p^2$$

$$p^2 - 4p + 1 = 0$$

$$\text{解の公式より、} p = 2 \pm \sqrt{3} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え！}$$

上記のどこが間違いか分かるかな？実は、最初の両辺を2乗したところが間違いです。

ちょっと、この式では長いので「なぜこの式変形がまずいのか」ということを $\sqrt{A} = B$ を使って説明したいと思います。

$\sqrt{A} = B$ の両辺を2乗します。すると、 $A = B^2$ となります。これを B について解くと、 $B = \sqrt{A}$ じゃなくて、 $B = \pm\sqrt{A}$ です。元の式は $\sqrt{A} = B$ なので、これでは $-\sqrt{A} = B$ という方程式も解くことになってしまいます。

余計な方程式を解くので、当然余計な答えがでてきます。これを防ぐためには以下のよう考えればOKです。

「 $\sqrt{A} = B$ 」は「 $A = B^2$ かつ $B \geq 0$ 」

上記でOKだというのは分かるかな？ $A = B^2$ は $B = \pm\sqrt{A}$ だけど、「かつ $B \geq 0$ 」なので $B = -\sqrt{A}$ は不適となり $B = \sqrt{A}$ だけとなります。

$A \Rightarrow B$ かつ $A \Leftarrow B$ が言えて始めて同値と言えます。数学は常に、同値変形をしていかないと同値性が崩れてしまい、余計な答えが出ることがあります。

厳密に言うと、常に同値変形を意識しながら解いていかないといけないのですが、実は適当に式変形をしていてもほとんどの場合、同値性は保たれています。

同値性が保たれない例としては、今回紹介したように2乗するときが有名です。2乗するときは、同値性が保たれているか確認をするようにしておいてください。

$\sqrt{A} = B$ の同値変形について

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 \text{ かつ } B \geq 0$$

それでは、先ほどの問題を同値変形を意識しながら解いていくことにします。

【解答】

$$2(1-p) = \sqrt{2} \sqrt{1+p^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-p)^2 = 2(1+p^2) \text{ かつ } 2(1-p) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(p^2 - 2p + 1) = 1 + p^2 \text{ かつ } p \leq 1 \leftarrow 2(1-p) \geq 0 \text{ より } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 1 = 0 \text{ かつ } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p = 2 \pm \sqrt{3} \text{ かつ } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p = 2 - \sqrt{3} \leftarrow \text{これが答え}$$

今回は、「同値性が2乗したら同値性が崩れることがある」ということを話しました。この他にも同値性が崩れるものはいくらでもあります。

そこで、本来なら「同値性を常に意識しながら解いて、ミスを失くす」というのがベストなんですけど、そうは言っても忘れてしまうこともあります。そんなときに、少しよい方法があります。覚えておいてください。

同値性の気づき方

数学の答えは、だいたいひとつ。複数の答えが出たときは、途中で同値性が崩れていることが多い！

実は、「常に同値性を意識しながら解かないとダメ」と思っているもついつい忘れてしまうということがあると思います。別に根拠はないんですけど、数学の答えが複数っていうことはほとんどないんです。

もちろん、答えが複数ということもないことはないんですけど、圧倒的に確率が低い。そこで、複数の答えが出てきたときは、より丁寧に見直すようにしておいてください。

今回の問題ですと、最初の誤答は $p = 2 \pm \sqrt{3}$ と複数の答えが出てきています。複数の答えが出てきたときはとにかく注意するようにしておいてください。

最後、「複数の答えが出てきたときは、注意する」なんて苦し紛れの手法を紹介しましたが、同値変形っていうのは本当に重要です。数学の得意な人でも、この同値変形をしっかりと理解できている人は意外なほど少ないです。今日話したことはごくごく簡単なことですが、「同値変形は本当に重要」ということを覚えておいてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位 →「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司