

「 $\sqrt{A} = B$ の同値変形について」

こんにちは、河見賢司です。今回のテーマは、「 $\sqrt{A} = B$ の同値変形について」です。いきなりですが、次の方程式の間違い探しをしてください。

$$2(1-p) = \sqrt{2} \sqrt{1+p^2}$$

$$4(1-p)^2 = 2(1+p^2) \quad \leftarrow \text{両辺を 2 乗した}$$

$$2(p^2 - 2p + 1) = 1 + p^2$$

$$p^2 - 4p + 1 = 0$$

$$\text{解の公式より、} p = 2 \pm \sqrt{3} \quad \leftarrow \text{これが答え！}$$

上記のどこが間違いに分かるかな？実は、最初の両辺を 2 乗したところが間違いです。

ちょっと、この式では長いので「なぜこの式変形がまずいのか」ということを $\sqrt{A} = B$ を使って説明したいと思います。

$\sqrt{A} = B$ の両辺を 2 乗します。すると、 $A = B^2$ となります。これを B について解くと、 $B = \sqrt{A}$ じゃなくて、 $B = \pm \sqrt{A}$ です。元の式は $\sqrt{A} = B$ なので、これでは $-\sqrt{A} = B$ という方程式も解くことになってしまいます。

余計な方程式を解くので、当然余計な答えがでてきます。これを防ぐためには以下のよう考えれば OK です。

$$\text{「} \sqrt{A} = B \text{」は「} A = B^2 \text{ かつ } B \geq 0 \text{」}$$

上記で OK だというのは分かるかな？ $A = B^2$ は $B = \pm \sqrt{A}$ だけど、「かつ $B \geq 0$ 」なので $B = -\sqrt{A}$ は不適となり $B = \sqrt{A}$ だけとなります。

$A \Rightarrow B$ かつ $A \Leftarrow B$ が言えて始めて同値と言えます。数学は常に、同値変形をしていないと同値性が崩れてしまい、余計な答えが出ることがあります。厳密に言うと、常に同値変形を意識しながら解いていかないといけないのですが、実は適当に式変形をしていてもほとんどの場合、同値性は保たれています。同値性が保たれない例としては、今回紹介したように 2 乗するときが有名です。2 乗するときには、同値性が保たれているか確認をするようにしておいてください。

$\sqrt{A} = B$ の同値変形

$$\sqrt{A} = B$$

$$\Leftrightarrow A = B^2 \text{ かつ } B \geq 0$$

それでは、先ほどの問題を同値変形を意識しながら解いていくことにします。

【解答】

$$2(1-p) = \sqrt{2} \sqrt{1+p^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-p)^2 = 2(1+p^2) \text{ かつ } 2(1-p) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(p^2 - 2p + 1) = 1 + p^2 \text{ かつ } p \leq 1 \quad \blacktriangleleft 2(1-p) \geq 0 \text{ より } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 1 = 0 \text{ かつ } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p = 2 \pm \sqrt{3} \text{ かつ } p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p = 2 - \sqrt{3} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

今回は、「同値性が2乗したら同値性が崩れることがある」ということを話しました。この他にも同値性が崩れるものはいくらかでもあります。

そこで、本来なら「同値性を常に意識しながら解いて、ミスを失くす」というのがベストなんですけど、そうは言っても忘れてしまうこともあります。そんなときに、少しよい方法があります。覚えておいてください。

同値性の気付き方

数学の答えは、だいたいひとつ。複数の答えが出たときは、途中で同値性が崩れていることが多い！

実は、「常に同値性を意識しながら解かないとダメ」と思っているもついつい忘れてしまうということがあると思います。別に根拠はないんですけど、数学の答えが複数っていうことはほとんどないんです。

もちろん、答えが複数ということもないことはないんですけど、圧倒的に確率が低い。そこで、複数の答えが出てきたときは、より丁寧に見直すようにしておいてください。

今回の問題ですと、最初の誤答は $p = 2 \pm \sqrt{3}$ と複数の答えが出てきています。複数の答

えが出てきたときはとにかく注意するようにしておいてください。

最後、「複数の答えが出てきたときは、注意する」なんて苦し紛れの手法を紹介しましたが、同値変形っていうのは本当に重要です。数学の得意な人でも、この同値変形をしつかりと理解できている人は意外なほど少ないです。今日話したことはごくごく簡単なことですが、「同値変形は本当に重要」ということを覚えておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>