こんにちは、河見賢司です。今日は、対偶を使った証明の説明です。対偶は、適当にしか理解していない人が多いですが、大学受験では、頻出とまではいきませんが、たまに出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

対偶を使った証明なんですけど、問題文に「対偶を使って証明せよ」と書いてくれる時もありますが、実際の大学受験では、何も書かれていない時が多いです。そういった時に、対偶を使って証明をするんだなと気づかないといけません。

で、どういったときに対偶を使って証明するかと言うと、「**扱いにくそうなとき**」です。

「扱いにくそうなとき」と言われても少し分かりにくいと思うので実際に問題を解きながら考えていきます。

問題

n は整数とする。n^2 が偶数ならば、n が偶数であることを示せ

【解説】
この問題を考えていくんだけど、n^2 を扱うより、n を扱ったほうが楽だよね。だから、逆にしたほうがいいんじゃない？逆にする時は、どうしたらいいかといえば「対偶」を使ったらいいんです。

「n^2 が偶数ならば、n が偶数である」の対偶は「n が偶数でない (つまり奇数) ならば、n^2 が偶数でない (つまり奇数)」ってなるよね。

もともとの命題を示すには n^2 が偶数という条件を扱わないといけなかったけど、これは扱いにく、でも対偶をとると n が奇数のときを扱えばいい、これだったら考えやすいよね。

こういうふうに、$A \Rightarrow B$ を示しなさいという問題で、A と B の命題を比べた場合、A よりも B の方が扱いそうな場合は、対偶を使って示していくことが多いです。今回の問題では n^2 を扱うより、n のほうがどう見ても扱いやすい。それでは、解答に進みます。対偶を使うということさえ気づけば、簡単な問題です。

【解答】
「n^2 が偶数ならば、n は偶数である」の対偶は「n が奇数のとき、n^2 が奇数である」である。

以下、対偶を示す。

n が奇数なので、$n = 2k + 1$ (k は整数) とおく。

$n^2 = (2k+1)^2$ ◀ $n = 2k + 1$ を代入した

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

$(2k^2 + 2k)$ は整数なので、$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ は奇数となる。

よって、「n が奇数のとき、n^2 が奇数である」は示された。

対偶の真偽は一致するので、「n^2 が偶数ならば、n は偶数である」は成立する。

今回は、考え方を理解してもらうためにあえてごくごく簡単な問題を使って説明をしました。でも、今日話したことは本当に重要だから対偶を使う時の考え方というものを理解しておいてください。

たまに、「問題集なんかの問題では解けるけど、模試なんかで出てきた初めてみる問題は解けない」という人がいます。そういった人は、問題集を解いている時、理由を考えずただ単に問題を解いているだけだからです。それでは、なかなかできるようになりません。

数学の問題には、「なぜ、そこでその解法を使って解いたのか」という独特な考え方というものが存在します。それを理解したら、初めてみる問題でも解けます。今回説明した、「扱いにくそうなときは対偶を使う」もその考えのうちのひとつです。問題としては、ごくごく簡単なものですが、しっかりと理解しておいてください。

対偶を使った証明問題は入試でも、たまに出てきます。最初にも書きましたが、教科書で勉強したように「対偶を使って証明せよ」と親切にも書いてくれるものは、少ないです。問題を見て「対偶」を使って示すのでは、と考えられるようにしておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com