

「2次不等式の考え方」

こんにちは、河見賢司です。今回は、2次不等式を解説したいと思います。

本当に簡単どころなんですけど、意外なほど理解できていない人が多いので解説をすることにしました。突然なんですけど、以下の問題を解いてください。

問題

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \text{ を解け}$$

【解説】

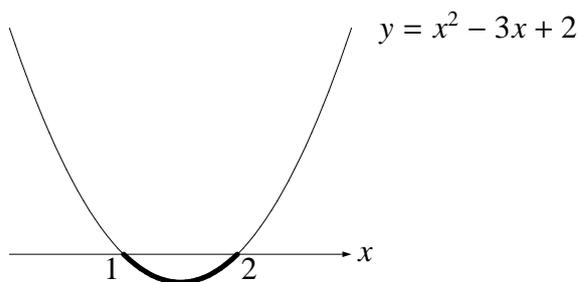
$x^2 - 3x + 2 < 0$ というのは、 $x^2 - 3x + 2$ の方が0より小さいところです。

不等式というのはグラフをかいて考えるのが一番考えやすいです。 $x^2 - 3x + 2 < 0$ は $y = x^2 - 3x + 2$ と $y = 0$ のグラフのふたつをグラフをかいて $y = x^2 - 3x + 2$ のグラフの方が $y = 0$ のグラフより下側(下側の方が値が小さい)にあるような x の値の範囲が答えです。

$y = 0$ のグラフっていうのは x 軸のことだから、 $y = x^2 - 3x + 2$ が x 軸より下側にあるような x の値の範囲が答えです。

それでは、グラフをかいてみることにします。不等式のグラフなんですけど、上下関係さえ分かればいいので、それほどまじめに？かく必要はありません。2次関数のときは x 軸との交点さえ分かればいいので頂点はもとめなくていいです。

$y = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ となります。今回は x^2 の係数が1と正なので下に凸な2次関数です(←分からない人は下の(注)を見てください)。そして x 軸との交点が1と2なのでグラフは以下ようになります。

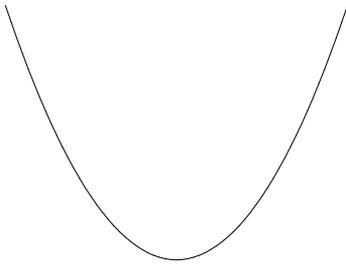


グラフは上記のようになります。 $y = x^2 - 3x + 2$ が $y = 0$ (x 軸) より下側になっているのは上図の太線部で1から2です。よって $x^2 - 3x + 2 < 0$ の答えは $1 < x < 2$ となります。

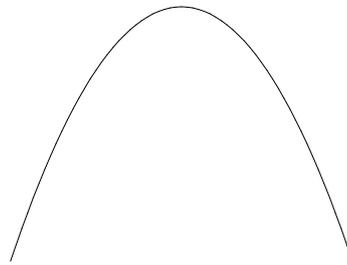
(注) 2次関数の概形について

2次関数は、 x^2 の係数の正負によって概形が違ってきます。 $y = ax^2 + bx + c$ で $a > 0$ のときは下に凸な2次関数となり、 $a < 0$ のときは上に凸な2次関数となります。

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



これで2次不等式についての説明は終わりです。たまに<のときは $a < x < b$ で>のときは $x < a$, $a < x$ なんて覚えている人がいるけど、慣れてくるとそれでもいいんですけど慣れるまではしっかりとグラフの意味を考えて解くようにしてください。

グラフの意味を知らない人は次のように解いてしまう人が多いんです。

問題

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0 \text{ を解け}$$

【誤答例】

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

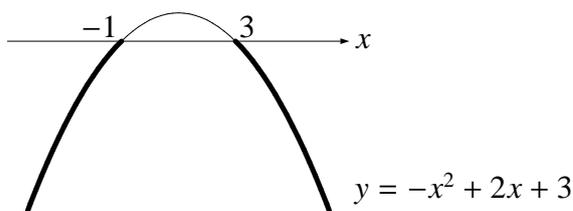
$$-(x^2 - 2x - 3) \leq 0$$

$$-(x + 1)(x - 3) \leq 0$$

ああ \leq ってなっているから $a < x < b$ のタイプだな

よって、答えは $-1 \leq x \leq 3$

上記は、間違いなんだけどこれはさっき説明したようにグラフをかけばすぐに間違いって気づくよね？



↑ $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$ が x 軸より下側にあるのは上図の太線部

よって、 $-(x + 1)(x - 3) \leq 0$ の答えは $x \leq -1, 3 \leq x$ となります。

グラフをかけば簡単に説明がつきますが、今回のように x^2 の係数がマイナスのときは両辺に -1 をかけて x^2 の係数をプラスにしてから解いていくようにした方が計算ミスが少なくなります。これは 2 次不等式だけでなく、3 次不等式や方程式なんかでもあてはまります。

————— 方程式、不等式の鉄則 —————

方程式、不等式の問題で最高次の係数 (2 次方程式の場合は x^2 の係数、3 次方程式の場合は x^3 の係数) がマイナスの場合は考えにくいので、両辺に -1 をかけて最高次の係数を正にしてから問題を解いていく

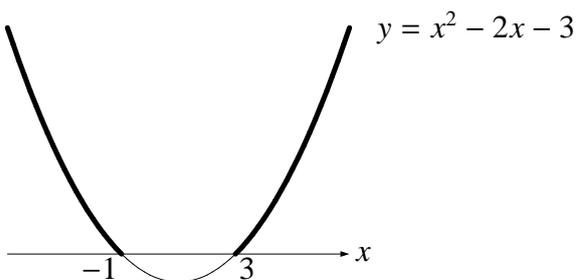
この考えを使ってさきほどの問題を解いてみますね

【解答】

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad \leftarrow x^2 \text{ の係数がマイナスなので、両辺に } -1 \text{ をかけた}$$

$$(x + 1)(x - 3) \geq 0$$



よって答えは $x \leq -1, 3 \leq x$

今回のプリントはこれで終わりです。本当に初歩的なことなんですが普段高校生に教えていてこのあたりのことを理解していない人が多いんです。グラフの上下関係で不等式を考えるとという手法は、今後本当によく出てきます。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com