こんにちは、河見賢司です。

突然ですが以下の問題をどう解けばいいですか？という質問をいただきました。少し難しい問題ですが、受験問題の解き方を理解してもらうのにちょうどいいと思ったので紹介させてもらうことにしました。

数学がある程度できるけど、実際の大学受験の問題をあまり解いたことがないという人に特に読んでほしいです。大学受験に実際に出題される問題の解き方を理解することができますよ。

問題

n を自然数とする。$\sqrt{2}n$ の整数部分を a とし、小数部分を b とする。

このとき、$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$ となることを示せ。

ただし、$\sqrt{2}$ は $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を満たす無理数であることは使ってもよいものとする。

難しい問題ですね。がっちりとした大学受験の問題です。このプリントでは、私がどのように考えこの問題を解いたのかということを話しながら説明していきます。

よく高校生から「問題集や参考書で、答えを見たら納得はするけど、こんな解法思いつかないよ」なんて言う人がいます。

確かにそんなことよくありますが、大学受験の問題ではすぐに解答を思いつけないということもよくあります。どの解法がいいのか解く前には分からないということが多いんです。

そんなときは、とりあえず思いついた解法を全て確かめていき、うまくいったものを解答にしているだけです。問題集の解説なんかはどういうふうに考えたかということを書かずに、いきなり答えが書かれているから勘違いしてしまうんです。

どういうふうに考えるかと言えば、例えば、問題を見て、「よく分からないけど、とりあえずこの解法かな？」と思ったら、その解法で解いていきます。

その解き方で解けたらＯＫですし、もし解けなかった場合は何か他のうまい解法はないかな？と考えてその解法で解いていきます。その解法で解けなかったら、また別の解法を考えます。

問題を見た瞬間に、最初から最後までの解法が頭に思いついている訳ではないんです。とりあえずうまくいきそうな解法をやってみて、できるまでやっている訳です。

では、この問題をどのように考えて解いていったかということを説明していきます。少し間があいたので、もう一度問題を書いておきます。

-問題-

n を自然数とする。$\sqrt{2}n$ の整数部分を a とし、小数部分を b とする。

このとき、$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$ となることを示せ。

ただし、$\sqrt{2}$ は $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を満たす無理数であることは使ってもよいものとする。

問題を見て、「なんか変わった問題だな。よく分かんないけど、とりあえず普通どおり $n = 1$ とか $n = 2$ を代入して考えていこう、それならなんらかの規則性が見えてくるかもしれない」と思いました。

$\sqrt{2}n$ の小数部分を考えるんだけど、$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を使って
$n = 1$ のとき、$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
$n = 2$ のとき、$2.82 < 2\sqrt{2} < 2.48$
$n = 3$ のとき、$4.23 < 3\sqrt{2} < 3.26$

規則性があるかな？と思ったけど何もなさそう、$n \leqq 35$ の範囲で成立したらいいんだから上記のような作業を $n = 35$ までやってもできるかもしれないけど、あまりに面倒そうなので違う解き方があるはず …

じゃあ、この解き方はどうもうまくいかないな、何か別の解法を考えないとな

この後、結構いろいろと考えましたが、どうも n では考えにくい、そこで …

「$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$」という表現を見て、「あっ、対偶を使うのかも？」と思いました。

「$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$」の対偶は「$b \leqq 0.01$ ならば $n > 35$」となります。これなら「$n \leqq 35$」という条件ではなく、「$b \leqq 0.01$」という条件を使えるので、ひょっとしたら考えられるかも。
⇑ あくまで解ける可能性があるということだけで、こうしたら解けるか？ということは分かりません。とにかく可能性のある解法をすべて使っていきます。

ちなみに、対偶について知らないという人は、以下のページを見てください。
http://www.hmg-gen.com/tecni1a-2.pdf

$n \leqq 35$ から $b > 0.01$ を示すことはできそうになかったけど、対偶の $b \leqq 0.01$ を使って $n > 35$ を示すことはできそう。以下、対偶を考えていきます。

$n > 35$ を示さないとダメ、$n > 35$ は不等式。不等式を示すのだから、自分で不等式を使っていかないといけない。

まだ、整数部分と小数部分という条件を使っていない。**与えられた条件はすべて使い切らないといけない**から、とりあえず整数部分と小数部分から不等式が作れそう。

とりあえず、これらから不等式を作って見ると $a \leqq \sqrt{2}n$ (⇐ 整数部分は当然もとの実数より小さい！(イコールの時もＯＫです)) となります。小数部分と整数部分をあわせたものはもとの実数と等しいので、$\sqrt{2}n = a + b$ が言えます。これを、$a \leqq \sqrt{2}n$ に代入してみると、$a \leqq a + b$ になります。

さらに、$b \leqq 0.01$ という条件をあわせると、$a \leqq a + b \leqq a + 0.01$

$a + b = \sqrt{2}n$ を代入すると、$a \leqq \sqrt{2}n \leqq a + 0.01$

ここから、さらに $\sqrt{2}$ は無理数なので、(無理数) × (整数) = (無理数) であることを考え、先ほどの不等式の左側の部分 $a \leqq \sqrt{2}n$ の等号が成立することはないので、(実数) = (整数部分) となるのは、実数が整数のときのみ。今回は実数が無理数なので、等しくなることはなく、絶対に (整数部分) < (実数) となる。

$a < \sqrt{2}n < a + 0.01$ となります。とりあえず、ここまでたどり着いたけど次にどうしようかな？よく分からないけど、ルートを含んでいると考えにくいのですべての辺を 2 乗してルートを消してから考えてみよう数学はルートを含んでいると考えにくいです。ルートを含んでいるときはルートを消す方向で考えることが多いです。

$$a^2 < (\sqrt{2}n)^2 < (a + 0.01)^2$$
$$a^2 < 2n^2 < a^2 + 0.02a + 0.0001$$

とりあえず、ここまできたけどどうしようかな？$n > 35$ を示したいんだけど、上記の式が n だけの式だったら、なんとか求めることができるけど、今回の式は n と a のふたつ

の文字を含んでいるので、どうも難しそう …

なんとかひとつの文字だけの不等式はできないかな？と、とことん考えます。上記の式を見ていると、なんか一番左側の式と右側の式が似ていることに気がつきました。

$a^2 < 2n^2 < a^2 + 0.02a + 0.0001$ これを満たすような n が存在するんだな。ということは a^2 と $a^2 + 0.02a + 0.0001$ の間に少なくと１つの整数が存在しないといけない、じゃあ、$0.02a + 0.00001 > 1$ とならないといけない。仮に、$0.02a + 0.0001 < 1$ となったら、$a^2 < 2n^2 < a^2 + 0.02a + 0.0001$ で一番左側の式と一番右側の式の間に整数が存在することはなくなる。

これを使えば、うまく解けました。私の頭の考えを書きました。考えたことをすべて書き出していたらすごい量になってしまうので、省略した部分もあり少し考えにくいかもしれませんが、**ひとつの問題を解くときは、「ああでもない、こうでもない」といろいろなことを考えるんだ**ということは覚えてください。それでは、解答に進みます。

【解答】
「$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$」の対偶は「$b \leqq 0.01$ ならば $n > 35$」である。

$a \leqq \sqrt{2}n \leqq a + 0.01$ となる。

また、$\sqrt{2}$ は無理数なので、$\sqrt{2}n$ は整数となることがないので、$a = \sqrt{2}n$ となることはないので、

$$a < \sqrt{2}n \leqq a + 0.01$$

全ての辺が正なので、全ての辺を 2 乗すると

$$a^2 < (\sqrt{2}n)^2 < (a + 0.01)^2$$

$$a^2 < 2n^2 < a^2 + 0.02a + 0.0001 \cdots (*)$$

$(*)$ を満たす整数 n が存在するとき、$0.02a + 0.001 > 1$ が言える。

$$0.02a + 0.001 > 1$$
$$0.02a > 0.9999$$
$$a > 49.995$$

a は整数であるので、a は 50 以上の整数となる。

一方、$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ より、

$1.41 \times 35 < \sqrt{2} \times 35 < 1.42 \times 35$

$49.35 < 35\sqrt{2} < 49.7$

$1.41 \times 36 < \sqrt{2} \times 36 < 1.42 \times 36$

$50.76 < 36\sqrt{2} < 51.12$

よって、$\sqrt{2}n$ の整数部分 a は $n \leqq 35$ のとき $a \leqq 49$ で、$n \geqq 36$ のとき $a \geqq 50$ となる。

以上より、「$b \leqq 0.01$ ならば $n > 35$」となる。

対偶の真偽は一致するので、「$n \leqq 35$ ならば $b > 0.01$」が成立する。//

今回の問題は少し難しかったと思います。問題自体は頻出タイプではないので、どうしても理解しなければいけないという問題ではありませんが、「**解ける可能性がある場合は、とにかくその解法を試して解いていく**」という考えを理解しておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com