いきなりですが、次の問題を解いてみてください。

問題１

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$ を計算せよ。

多くの人が、この問題を解けと言えば $(k-1)^3$ を展開して解いていくと思います。

まあ、そのやり方でも解けないことはないんですが $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}(k^3-3k^2+3k-1)$ を計算するのって面倒だよね。

大学受験問題では特にそうなんですが、**数学の問題で、単に面倒だけな問題というものはそれほど出題されません。**

今回の問題では、$(k-1)^3$ を展開したら解けるんだけど、面倒だよね。しんどいだけで誰でも解ける。こんな問題、大学受験に出題される訳ないんです。

数学の問題を解いていて、この解法なら解けそうだけどあまりにも計算が面倒だな、と感じるときはその解法で解く前に一度ストップして、違う解法はないか考えるようにしておいてください。

そういった場合、ほとんどのときで違った解法が存在します。

では、問題に戻ります。今回の問題は、シグマに関する問題ですが、シグマの問題で解き方がよく分からないときは、とりあえずシグマを具体的に書き出していきます。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3\\&=0^3+1^3+2^3+\cdots+\left\{(n+1)-1\right\}\\&=1^3+2^3+\cdots+n^3\end{aligned}$$

とりあえず $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$ を具体的に書き出してみたんだけど、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3=1^3+2^3+\cdots+n^3$ ってなるよね。

ここで、ゆっくり考えるんだけど $1^3+2^3+\cdots+n^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ ってなるんじゃない？

よく分からないという人は、$\sum_{k=1}^{n} k^3$ を書き出してみて。$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ってなるよね。だから、$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ってなります。これなら、シグマの公式が使えるから簡単に解けるよね。このように、シグマの問題があまりに面倒なときは、具体的に書き出してみるようにしてください。そうすれば、今回の問題のように簡単な解法が見つかる可能性が高いです。

繰り返しになりますが、数学の問題では、単に面倒な計算を背よという問題はあまり出題されません。その解法で解くことはできるけど、あまりに計算が面倒なときは他の解法がないか考えるようにしてください。

それでは、問題の解答に進みます。

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \text{◀ 考え方参照}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

$$= \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \quad \text{◀ これが答え}$$

次に、よく似た問題を解いてもらいます。今回も、展開するのは面倒だな？と感じて、具体的に書き出したら解法が思いつくと思います。

問題 2

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ を計算せよ。

これも、さっきの問題と同じように展開するのは少し面倒だよね？そこで、シグマの中身を具体的に書き出してみます。

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$$

$$= 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3$$

上記のようになるけど、もし仮に青色の部分の $2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ が $1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3$ のように 1^3 があったら $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ が $1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}k^3$ ってなるからシグマの公式が使える形になるよね。

$2^3+3-3+\cdots+(n+1)^3$ の部分が $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ になるためには $2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ に 1^3 を加えたら $1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3$ になるよね。でも、こうなるためには $2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ に 1^3 を加えないとダメなんだけど、勝手に $2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ に 1^3 加えたらダメだから、$2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$ から 1^3 を引かないとダメだよね。

このことより、

$2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+(n+1)^3-1^3$ ◀ 1^3 を加えて、1^3 を引いた

$=\sum_{k=1}^{n+1}k^3-1^3$ ◀ $1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}k^3$ より

$=\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\}^2-1$ ◀ シグマの公式を使った！

$=\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1\right\}\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1\right\}$ ◀ 因数分解をした

$=\left(\frac{(n+1)(n+2)+2}{2}\right)\left(\frac{(n+1)(n+2)-2}{2}\right)$

$=\frac{(n^2+3n+4)(n^2+3n+2-2)}{4}$

$=\frac{(n^2+3n+4)(n^2+3n)}{4}$

$=\frac{n(n+3)(n^2+3n+4)}{4}$ ◀ これが答え

これで、今回のプリントは終了です。シグマで、よくわからないときは具体的に書き出してみるということも覚えてほしいのですが、今回のプリントで一番覚えておいて欲しいことは、数学の問題では単に計算がややこしいだけの問題はそれほど出題されないということです。

計算があまりにも面倒な場合、もっと簡単な解法があるのでは？と考えられるようにしておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com