「群数列に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、数列の群数列に関する問題を解説したいと思います。

群数列は、「見るだけでお手上げ」「解答を見ても、何をやっているのかわからない」そういう人が多くいます。確かにやっている内容はややこしいですが、ワンパターンで解けるので慣れてくると簡単です。このプリントでは、その群数列のワンパターン解法を解説するので、しっかりと勉強をしておいてください。

まずは、群数列のワンパターン解法をまとめておきます。

群数列の解法

(Step1)	a_n を求められるときは、a_n を求める
Step2	第 n 群に含まれる項数を求め、それを b_n とする
Step3	$\sum_{k=1}^{n} b_k$ を計算する。その値が第 n 群の末項の項数と一致する

群数列のワンパターン解法としては、上記のとおりです。ただ、問題を通さないと何をいっているのか分からないと思うので、基本的な群数列の問題を通して上記の解法を理解していって欲しいと思います。

問題

群数列 $2\,|\,4, 6\,|\,8, 10, 12\,|\,14, 16, 18, 20\,|\,22, \cdots$ がある。このとき、以下の問いに答えよ

(1) 第 5 群の最初の数を求めよ

(2) 150 は第何群の第何項となるか求めよ

【解説】
これを先ほどの群数列のワンパターン解法で解いていきます。まずは、Step1 からです。

(Step1) a_n を求められるときは、a_n を求める

上記の Step1 に (Step1) とカッコがついている理由は、群数列には a_n を求められるものと、a_n が求められないものがあります。ですから、求められるときはまず a_n を求め、a_n を求められないときは、Step1 は無視してそのまま Step2 に向かってください。

今回の問題は、与えられた群数列のしきりを外して考えると $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \cdots$ となります。これは初項 2、等差 2 の等差数列となります。よって $a_n = 2n$ と、a_n を求

めることができるので求めておきました。これで Step1 が終わったので、Step2 に進みます。

Step2　第 n 群に含まれる項数を求め、それを b_n とする

Step2 は第 n 群に含まれる項数を数えていきます。このことを踏まえて与えられた群数列を見てみると第 1 群の項数は 1 個、第 2 群の項数は 2 個、第 3 群の項数は 3 個。このことより、第 n 群の項数は n 個と予想できます。
⇑ 第 n 項に含まれる項数ですが、難しい数列になることは少なく今回のように簡単に分かるものがほとんどです。

第 n 群に含まれる項数を b_n とすると、$b_n = n$ となります。これで Step2 が終わったので、Step3 に進みます。

Step3　$\sum_{k=1}^{n} b_k$ を計算する。その値が第 n 群の末項の項数と一致する

Step3 は $\sum_{k=1}^{n} b_k$ を計算したらいいので、これを計算して $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ となります。これが、第 n 群の末項の項数と一致します。

なぜ、$\sum_{k=1}^{n} b_k$ が、第 n 群の末項の項数と一致するか分からないという人もいると思いますので、理由を説明しておきます。

少し見やすいように、今回の群数列を a_n で表しておきます。

$a_1 \,|\, a_2,\ a_3 \,|\, a_4,\ a_5,\ a_6 \,|\, a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10} \,|\, a_{11},\ \cdots$

今回は、$b_n = n$ なので、$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ となります。

$n = 1$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$ ◀ これは第 1 群の末項の項数と一致
$n = 2$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = 3$ ◀ これは第 2 群の末項の項数と一致
$n = 3$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = 6$ ◀ これは第 3 群の末項の項数と一致
$n = 4$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) = 10$ ◀ これは第 4 群の末項の項数と一致

とりあえず $n = 1, 2, 3, 4$ を代入したけど、$\sum_{k=1}^{n} b_k$ が第 n 群の末項の項数と一致するっていうのは、明らかだよね？

$\sum_{k=1}^{n} b_k$ は $b_1+b_2+\cdots+b_n$ です。これって要するに(第 1 群の項数)+(第 2 群の項数) $+\cdots+$(第 n 群の項数) です。

(第 1 群の項数)+(第 2 群の項数) $+\cdots+$(第 n 群の項数)って当然、第 n 群 (第 n 群も含む) までに含まれる項数と一致するよね？

これで、分からないという人はさきほど、同じことを書きましたが、もう一度書きますので以下で成立しているということを確認して下さい。
$n=1$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$ ◀ これは第 1 群の末項の項数と一致
$n=2$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+1)=3$ ◀ これは第 2 群の末項の項数と一致
$n=3$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3+1)=6$ ◀ これは第 3 群の末項の項数と一致
$n=4$ のとき、$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1)=10$ ◀ これは第 4 群の末項の項数と一致

一般に公式って文字を含んでいるからあっているかどうか実感できにくいよね？そういったときは、今回のように簡単な数字を自分で代入をしてみて、確かにあっているなということが確認できますよ。

この簡単な数字で確かめる方法って意外によく使う手法なので覚えておいてください。

ここまでの説明で、Step3 の $\sum_{k=1}^{n} b_k$ が第 n 群の末項の項数と一致するということは理解できたと思います。ここまできても理解できない人もいると思います。そういった人は、無視して解法を覚えてください。

高校生のとき、私もそうだったんですけど、どんなに考えても分からない問題が存在しました。そういったときは、理解しようと頑張ったんですけど、無理でした。

そういうときは、考えても分からないので無視してどんどん進めるようにしていました。不思議なもので、まったく理解できなかった問題をある程度時間をおいてから考えてみると分かるということが多かったです。

もちろん時間をあけたからと言って、必ず理解できるようになる訳ではありませんが、分からないといってその場で立ち止まって何もしないよりはるかに効率的ですよね？少し、話がそれましたが問題に戻ります。

ここまでで Step1 から Step3 までの作業が終了しました。これで、(1) (2) などの問題に進むことができます。絶対とは言いませんが、群数列の問題では、設問に関係なくこの

Step3 までの作業が必要ということが本当に多いです。ですから、設問にとりかかるまでにここまでの作業をしたらいいと思います。実際に設問に進むのは、この作業をしてからです。では、問題を解いていきますが、少し間が空いたのでむう一度、Step1 から Step3 までの作業をしておきたいと思います。

問題

群数列 $2\,|\,4,\ 6\,|\,8,\ 10,\ 12\,|\,14,\ 16,\ 18,\ 20\,|\,22,\ \cdots$ がある。このとき、以下の問いに答えよ

(1) 第 5 群の最初の数を求めよ

(2) 150 は第何群の第何項となるか求めよ

【解説】

(Step1) a_n を求められるときは、a_n を求める

$a_n = 2n$

Step2　第 n 群に含まれる項数を求め、それを b_n とする

$b_n = n$

Step3　$\sum_{k=1}^{n} b_k$ を計算する。その値が第 n 群の末項の項数と一致する

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

ここまでが群数列の準備です。では、実際にここから設問にとりかかります。

(1)「第５群の最初の数を求めよ」といった問題ですが、まずは第５群の最初の数が第何項目かということを求めます。

これは、簡単だよね。どうやって求めるかと言えば、第５群の初項というのは、第４群の末項よりひとつだけ大きな数字じゃない？だから、第５群が第何項目かというのは第４群の末項が第何項目かということを求め、それにプラス１したものです。

第４群の末項が第何項目かというのは、Step3 を利用すれば簡単に求められるよね。Step3 で求めた $\frac{1}{2}n(n+1)$ に $n = 4$ を代入したものが第４群の末項の項数です。ですから、この式に $n = 4$ を代入すると $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1) = 10$ なので、第４群の末項は第１０項目となります。これにプラス１したものが第５群の初項の項数なので、第５群の初項は第１１項目となります。

これを $a_n = 2n$ に代入すると $a_{11} = 22$ となります。これで (1) が終わったので、次に (2) に進みます。

(2)「１５０は第何群の第何項となるか求めよ」という問題ですが、とりあえず $a_n = 2n$ より、１５０となるのは $n = 75$ のときだよね？まずは $n = 75$ が第何群に含まれるかということを考えていきます。

これは、先ほどの Step3 で求めた第 n 群の末項の項数が $\frac{1}{2}n(n+1)$ ということを使って求めます。

$\frac{1}{2}n(n+1)$ にだいたいこんな感じかな？という数を代入してできるだけ７５に近くなる n を求めます。

いくつかの自然数を実際に代入してみると、$n = 11$ のとき $\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot(11+1) = 66$ となり、$n = 12$ のとき $\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot(12+1) = 78$ となります。

このことより、第１１群の末項の項数は６６で、第１２群の末項の項数は７８です。

ということは、第７５項目は当然、第１２群に含まれているんじゃない？だって、第１１群の末項の項数が６６ということは、第１２群の初項は第６７項目で末項が第７８項目。ということは、第７５項目は当然第１２群目に含まれているよね？

あとは、ここから第７５項目が第１２群の第何項目かを考えるんですけど、第１２群の初項が第６７項目ということを考え $75 - 67 + 1 = 9$ (← (注) を見よ) より、第７５項目は第１２群の第９項目ということが分かります。

(注) 上記の第何項目かを求めるところで、$75 - 67 = 8$ で第８項目としてしまう人が多いですが、これは間違いです。

初項の項数を引くのですが、そのとき +1 が必要であることを忘れやすいので注意して下さい。

これは、例えば 1, 2, 3, 4, 5 という数列がありました。５は第何項目ですか？と聞かれたら当然、第５項目だよね？でも、初項の項数を引くというやり方では $5 - 1 = 4$ となってしまいます。

当然プラス１が必要で $5-1+1=5$ となりプラス１が必要だよね？忘れやすいので注意してください。

これもそうですが、よく分かんなくなったらごくごく簡単な数列を作り自分であっているか確認をしたらいいと思います。

【解答】
与えられた数列を a_n とすると $a_n=2n$ となる。

また、第 n 群に含まれる項数を b_n とすると $b_n=n$ となる。このことより、第 n 群の末項は第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項めとなる。

(1)
第４群の末項は $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1)=10$ より、第５群の初項は第１１項目。

よって、第５群の最初の数は $a_{11}=22$

(2) １５０は第７５項目。

第１１群の末項は第６６項、第１２群の末項は第７８項となる。よって、第７５項目は第１２群の第９項目となる。

今回の群数列の解説プリントはこれで終わりです。今回扱った問題はごくごく簡単な問題ですが、これさえ理解できていたら群数列は完璧です。

どんなに難しくなっても今回話したような内容をしっかりと理解できていさえいれば大丈夫です。最初のうちは、何をやっているのかということが分かりにくく大変かもしれませんが、やっていることが本当にワンパターンなので慣れてくると大丈夫です。理解できるまで繰り返し読んでもらえると嬉しいです。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com