

今日は、シュワルツの不等式について説明します。シュワルツの不等式は、受験ではそれほど頻出という訳ではありませんが、知っているか知らないかで計算量がまったく違ってきますので、難関大学を目指す人は一応理解しておいて方がいいと思います。

シュワルツの不等式

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$$

シュワルツの不等式なんですけど高校の教科書に載っていないので、証明なしで使うのはまずいです。シュワルツの不等式を使うときは、証明をしてから使うようにしてください。証明は、以下のようにすればできますよ。知らなかったらなかなか思いつかないと思うので、何度か解いて導き方を覚えておいてください。

任意の実数 t に対して

$(x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \dots + (x_nt - y_n)^2 \geq 0$ が成立する。

↑ 2乗したんだから全てが0以上。0以上を足し合わせても0以上

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \dots + (x_nt - y_n)^2 \\ &= x_1^2t^2 - 2x_1y_1t + y_1^2 + x_2^2t^2 - 2x_2y_2t + y_2^2 + \dots + x_n^2t^2 - 2x_ny_nt + y_n^2 \quad \leftarrow \text{単に展開した} \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)t + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \quad \leftarrow t \text{で整理した} \end{aligned}$$

ここから少し考えるんだけど $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)t + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ は下に凸な2次関数。これが任意の t で0以上でないとならぬから、判別式を D とすると、 $D \leq 0$ を満たせばよいことになります。

判別式を D とする。 $D \leq 0$ であればよいので

$$D/4 = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \leq 0$$

$\therefore (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$ ◀ シュワルツの不等式を示せた

シュワルツの不等式なんですけど、実はベクトルを使えばもっと簡単に導けるんです。高校数学ではベクトルは3次元までしか扱わないので、この証明の仕方はダメですが一応頭の中に入れておいてください。

シュワルツの不等式に入る前にベクトルの話を少しします。

$\vec{a} = (x_1, x_2)$ のとき、 $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + x_2^2$ となり

$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ のとき、 $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ となります。

このことから、予想できると思うんですけど $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ のとき、 $|\vec{a}| = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ となっております。

次に内積ですが $\vec{a} = (x_1, x_2), \vec{b} = (y_1, y_2)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2$ となり
 $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3), \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ となります。
このことから $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ のとき、
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ が成立します。

このことを使ってシュワルツの公式を証明していきます。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \leftarrow \text{内積の定義より}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \quad \leftarrow \text{両辺を2乗した}$$

で、ここから $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ と $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ のどっちが大きいか考えるんだけど、 $\cos^2 \theta$ の値の範囲は $0 \leq \cos \theta \leq 1$ だよ。 $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ に $\cos^2 \theta$ をかけた $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$ は $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ より小さくなります。

$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ より小さい $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$ が $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ と等しい。このことから $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ となります。

ここで、 $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3), \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ とおくと

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \quad \leftarrow \text{シュワルツの公式が示された}$$

最初にも言いましたが、シュワルツの不等式を使って解答をかくときは証明をしてから示すようにしてください。

高校数学では、ベクトルは3次元までしか扱っていないので3次元以内のシュワルツの不等式ならベクトルで証明をしてもらってもいいですが、それ以外のときは、最初にしめたように判別式を使って示す方法で証明してください。

では、実際にシュワルツの方程式を使って問題を解いていきます。

問題

n を自然数として、 a_1, a_2, \dots, a_n を正の実数とする。

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \right) \geq n^2$$

上記の不等式が成立することを示せ。

【解答】

シュワルツの不等式より (ここでは証明を割愛します)

シュワルツの不等式 $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$ に $x_k = a_k, b_k = \frac{1}{b_k}$ で置き換えます

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \right) &\geq \left(a_1 \frac{1}{a_1} + a_2 \frac{1}{a_2} + \dots + a_n \frac{1}{a_n} \right)^2 \\ &= (1 + 1 + \dots + 1)^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

このようにシュワルツの不等式を使えば、本当に簡単に問題を解くことができます。一応別解として、シュワルツの不等式で解かない解法を紹介しておきます。帰納法を使って証明します。

【解説】

帰納法なので、 $n = 1$ のとき成立。 $n = k$ のとき成立すると仮定して、 $n = k + 1$ のとき成立すると示していくのかな? と考えます。 $n = k$ のとき

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_k^2} \right) \geq k^2 \dots (*)$$

(*) を使って $n = k + 1$ のとき成立することを示せば OK です。とりあえず $n = k + 1$ のときの式をかいてみます。

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{a_{k+1}^2} \right) \geq (k + 1)^2$$

上記の式が言えたら証明終了になるんだけど、式変形が少し難しいけど次のように変形をしていきます。

$$\begin{aligned}
& (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{a_{k+1}^2} \right) \\
&= \left\{ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + \frac{1}{a_{k+1}^2} \right\} \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + 1 \quad \leftarrow \text{分配法則を使って展開をした}
\end{aligned}$$

上記のような式変形をなぜするのか思いつかないという人も多いと思うけど、帰納法は $n = k$ のとき成り立つと仮定して $n = k + 1$ のとき成立するということを示すんだよね。

これは、要するに $n = k$ のとき成り立つ式を使って、 $n = k + 1$ のときの式を証明していくんだよね。証明をするには $n = k$ の式を絶対に使わないとダメなんだ。

この問題では $n = k$ のときの式は $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right)$ なんだから、 $n = k + 1$ のときなんとかこの式を使うには上記のように式変形をしたらいいんじゃない？うまくいくかどうかはよくわかんないけど、式変形をしたらとりあえず $n = k$ のときの成立式を使える形になったよね？

$$\begin{aligned}
& (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + 1
\end{aligned}$$

上記の式で $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right)$ の部分は $n = k + 1$ のときの条件式を使って考えられるとして、

残りの

$\frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + 1$ の部分を考えていかないとダメだよ。そこでどうするのかな？と考えるんだけど。1は後で使うとして、残りの部分を展開してみます。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \cdots + \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} \right) + \left(\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2} \right) \end{aligned}$$

また、ここから考えないといけないんだけど、大学受験生ならここからの式変形はすぐに思いついて欲しいですが、ここからは実は相加相乗平均がつかえます。

左のカッコの1番左の項と右のカッコの1番左の項を足し合わせてみます。

$$\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} \geq 2 \sqrt{\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_1^2}} = 2$$

次に2番目の項同士を足し合わせてみます。

$$\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} \geq 2 \sqrt{\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2}} = 2$$

こういうふうに左側のカッコの*i*番目の項と右側の項の*i*番目の項をペアにすると全て相加相乗平均を使うことができます。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、分数で足し算で表されていて互いに掛け合わせると変数が消えるときは相加相乗平均を使えるのでは？と考えるようにしてください。

以上のことを踏まえて解答に進みます。

問題とのスペースが空いているので、もう一度問題を載せておきます。

問題

n を自然数として、 a_1, a_2, \dots, a_n を正の実数とする。

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right) \geq n^2$$

上記の不等式が成立することを示せ。

【別解】

(i) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$(\text{右辺}) = 1$$

よって、成立。

(ii) $n = k$ のとき $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \geq k^2 \cdots (*)$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{a_{k+1}^2} \right) \\ &= \left\{ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + \frac{1}{a_{k+1}^2} \right\} \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + 1 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \cdots + \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} \right) + \left(\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} \right) + \left(\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} \right) + \cdots + \left(\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2} \right) \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_1^2}} + 2 \sqrt{\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2}} + \cdots + 2 \sqrt{\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2} \cdot \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}} \quad (\because \text{相加相乗平均}) \\ &= 2k \cdots (**). \end{aligned}$$

よって①は

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{a_{k+1}^2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) + 1 \\ &\geq k^2 + 2k + 1 \quad (\because (*)(**)) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

よって、 $n = k+1$ のときも成立する。

以上より、全ての自然数において与式は成立する。

とりあえずシュワルツの不等式を使わない解法で解きました。見てもらえば分かると思いますが、シュワルツの不等式を使った解法の方がはるかに簡単です。出題頻度としてはそれほど高くないですが、難関大学を志望するという人はぜひともシュワルツの不等式を覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com