「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

今日は、シュワルツの不等式について説明します。シュワルツの不等式は、受験ではそれほど頻出という訳ではありませんが、知っているか知らないかで計算量がまったく違ってきますので、難関大学を目指す人は一応理解しておいて方がいいと思います。

シュワルツの不等式

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$$

シュワルツの不等式なんですが高校の教科書に載っていないので、証明なしで使うのはまずいです。シュワルツの不等式を使うときは、証明をしてから使うようにしてください。証明は、以下のようにすればできますよ。知らなかったらなかなか思いつかないと思うので、何度か解いて導き方を覚えておいてください。

任意の実数 t に対して
$(x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2 \geqq 0$ が成立する。
⇑ ２乗したんだから全てが０以上。０以上を足し合わせても０以上

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2\\ &= x_1^2t^2-2x_1y_1t+y_1^2+x_2^2t^2-2x_2y_2t+y_2^2+\cdots+x_n^2-2x_ny_n+y_n^2 \quad \blacktriangleleft \text{単に展開した}\\ &= (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 \quad \blacktriangleleft t\text{ で整理した}\end{aligned}$$

ここから少し考えるんだけど $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ は下に凸な２次関数。これが任意の t で０以上でないとダメなんだから、判別式を D とすると、$D \leqq 0$ を満たせばよいことになります。

判別式を D とする。$D \leqq 0$ となる。

$$D/4 = (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \leqq 0$$

$\therefore (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$ ◀ シュワルツの不等式を示せた

シュワルツの不等式なんですが、実はベクトルを使えばもっと簡単に導けるんです。高校数学ではベクトルは３次元までしか扱わないので、この証明の仕方はダメですが一応頭の中にいれておいてください。

シュワルツの不等式に入る前にベクトルの話を少しします。

$\vec{a} = (x_1, x_2)$ のとき、$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + x_2^2$ となり
$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ のとき、$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ となります。
このことから、予想できると思うんですけど $\vec{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のとき、
$\left|\vec{a}\right| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ ってなります。

次に内積ですが $\vec{a} = (x_1, x_2), \vec{b} = (y_1, y_2)$ のとき、$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2$ となり
$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3), \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ のとき、$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ となります。
このことから $\vec{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \vec{b} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ のとき、
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_ny_n$ が成立します。

このことを使ってシュワルツの公式を証明していきます。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\theta$ ◀ 内積の定義より

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$ ◀ 両辺を２乗した

で、ここから $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ と $\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ のどっちが大きいか考えるんだけど、$\cos^2\theta$ の値の範囲は $0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ だよね。$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ に $\cos^2\theta$ をかけた $\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$ は $\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ より小さくなります。

$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ より小さい $\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$ が $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ と等しい。このことから $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqq \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$ となります。

ここで、$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3), \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ とおくと
$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$ ◀ シュワルツの公式が示された

最初にも言いましたが、シュワルツの不等式を使って解答をかくときは証明をしてから示すようにしてください。

高校数学では、ベクトルは3次元までしか扱っていないので3次元以内のシュワルツの不等式ならベクトルで証明をしてもらってもいいですが、それ以外のときは、最初にしめしたように判別式を使って示す方法で証明してください。

では、実際にシュワルツの方程式を使って問題を解いていきます。

問題

n を自然数として、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とする。

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right) \geqq n^2$$

上記の不等式が成立することを示せ。

【解答】

シュワルツの不等式より (ここでは証明を割愛します)

シュワルツの不等式 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$ に $x_k = a_k,\ b_k = \dfrac{1}{b_k}$ で置き換えます

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1}^2+\frac{1}{a_2}^2+\cdots+\frac{1}{a_n}^2\right) &\geqq \left(a_1\frac{1}{a_1}+a_2\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\frac{1}{a_n}\right)^2 \\ &= (1+1+\cdots+1)^2 \\ &= n^2{}_{//}\end{aligned}$$

このようにシュワルツの不等式を使えば、本当に簡単に問題を解くことができます。一応別解として、シュワルツの不等式で解かない解法を紹介しておきます。帰納法を使って証明します。

【解説】

帰納法なので、$n=1$ のとき成立。$n=k$ のとき成立すると仮定して、$n=k+1$ のとき成立すると示していくのかな？と考えます。$n=k$ のとき

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right) \geqq k^2 \cdots (*)$$

$(*)$ を使って $n=k+1$ のとき成立することを示せば OK です。とりあえず $n=k+1$ のときの式をかいてみます。

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}+\frac{1}{a_{k+1}^2}\right)\geqq (k+1)^2$$

上記の式が言えたら証明終了になるんだけど、式変形が少し難しいけど次のように変形をしていきます。

$$\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}+\frac{1}{a_{k+1}^2}\right)\\
=&\left\{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+\frac{1}{a_{k+1}^2}\right\}\\
=&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+1
\end{aligned}$$

◀ 分配法則を使って展開をした

上記のような式変形をなぜするのか思いつかないという人も多いと思うけど、帰納法は $n=k$ のとき成り立つと仮定して $n=k+1$ のとき成立するということを示すんだよね。

これは、要するに $n=k$ のとき成り立つ式を使って、$n=k+1$ のときの式を証明していくんだよね。証明をするには $n=k$ の式を絶対に使わないとダメなんだ。

この問題では $n=k$ のときの式は $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)$ なんだから、$n=k+1$ のときなんとかこの式を使うには上記のように式変形をしたらいいんじゃない？うまくいくかどうかはよくわかんないけど、式変形をしたらとりあえず $n=k$ のときの成立式を使える形になったよね？

$$\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+1
\end{aligned}$$

上記の式で $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)$ の部分は $n=k+1$ のときの条件式を使って考えられるとして、

残りの

$\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2}\right) + 1$ の部分を考えていかないとダメだよね。そこでどうするのかな？と考えるんだけど。1 は後で使うとして、残りの部分を展開をしてみます。

$$\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \cdots + \frac{a_k^2}{a_{k+1}^2}\right) + \left(\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}\right)$$

また、ここから考えないといけないんだけど、大学受験生ならここからの式変形はすぐに思いついて欲しいですが、ここからは実は相加相乗平均がつかえます。

左のカッコの 1 番左の項と右のカッコの 1 番左の項を足し合わせてみます。

$$\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_1^2} \geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_1^2}}{\cancel{a_{k+1}^2}} \cdot \frac{\cancel{a_{k+1}^2}}{\cancel{a_1^2}}} = 2$$

次に 2 番目の項同士を足し合わせてみます。

$$\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2} + \frac{a_{k+1}^2}{a_2^2} \geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_2^2}}{\cancel{a_{k+1}^2}} \cdot \frac{\cancel{a_{k+1}^2}}{\cancel{a_2^2}}} = 2$$

こういうふうに左側のカッコの i 番目の項と右側の項の i 番目の項をペアにすると全て相加相乗平均を使うことができます。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、分数で足し算で表されていて互いに掛け合わせると変数が消えるときは相加相乗平均を使えるのでは？と考えるようにしてください。

以上のことを踏まえて解答に進みます。

問題とのスペースが空いているので、もう一度問題を載せておきます。

問題

n を自然数として、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とする。

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}\right) \geqq n^2$$

上記の不等式が成立することを示せ。

【別解】

(i) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1^2} = 1$$

$$(\text{右辺}) = 1$$

よって、成立。

(ii) $n=k$ のとき $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k^2}\right)\geqq k^2\cdots(*)$ が成立すると仮定する。

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}+\frac{1}{a_{k+1}^2}\right)$$

$$=\left\{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+\frac{1}{a_{k+1}^2}\right\}$$

$$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+1\cdots①$$

ここで

$$\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2}+\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2}+\cdots+\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2}\right)+\left(\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2}+\frac{a_{k+1}^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2}+\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2}\right)+\left(\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2}+\frac{a_{k+1}^2}{a_2^2}\right)+\cdots\left(\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2}+\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}\right)$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{a_1^2}{a_{k+1}^2}\cdot\frac{a_{k+1}^2}{a_1^2}}+2\sqrt{\frac{a_2^2}{a_{k+1}^2}\cdot\frac{a_{k+1}^2}{a_2^2}}+\cdots+2\sqrt{\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2}\cdot\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}}\quad(\because \text{相加相乗平均})$$

$$=2k\cdots(**)$$

よって ① は

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}^2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_k^2}\right)+1$$

$$\geqq k^2+2k+1\quad(\because (*)(**))$$

$$=(k+1)^2$$

よって、$n=k+1$ のときも成立する。

以上より、全ての自然数において与式は成立する。

とりあえずシュワルツの不等式を使わない解法で解きました。見てもらえば分かると思いますが、シュワルツの不等式を使った解法の方がはるかに簡単です。出題頻度として

はそれほど高くないですが、難関大学を志望するという人はぜひともシュワルツの不等式を覚えておいてください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司