

こんにちは、河見賢司です。

以前相加相乗平均を使った最大値、最小値問題のごくごく簡単な問題を紹介しました。

見ていないという人は、こちらのページをご覧ください。

<http://www.hmg-gen.com/kaitou2-3.pdf>

相加相乗平均は、入試でも頻出なんですけど適当にしか理解していない人が多いです。前回はごくごく簡単な問題でしたが、今回は少し発展的な問題を解説します。

問題

$x > 1$ のとき、 $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ の最小値を求めよ。

ここでどうやって最小値を求めるのかな？と考えるんだけど数学IIIを勉強している人なら、微分をしてグラフをかいて解いていけばいいんだけど、分数関数の微分って面倒だったよね。だから、あまりしたくない…そこで違った解法はないのかな？と考えることにします。

$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ の最小値を求めよだけど、これってルートが入っているから難しいんだよね。そ

こで、 $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ って式変形したら少しは簡単になるんじゃない？ $\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ が最小になるときは、ルートの中身の $\frac{x^2}{x-1}$ が最小になるときと一致するよね？以降、 $\frac{x^2}{x-1}$ の最小値を求めていきます。

こうするとややこしいルートの計算はしなくて済むよね。数学なんですけど、とにかくルートや絶対値などややこしいものがあると難しくなるので、外せるときは外して考えていきます。だから、そういったものが出てきたら、なんとかして外すことはできないかな？と考えるから解くようにしてください。

それから $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ ってしたけど、これは $x > 0$ のときに成立する式だから、注意しておいてください。この問題では $x > 1$ だから $x > 0$ をみてしています。

$\frac{x^2}{x-1}$ なんだけど、これを見た瞬間ある作業をしないとイケません。

分数関数の次数下げ

分数関数で、分子の次数の方が分母の次数より大きい、または同じ場合、分子の次数の方が分母の次数より小さくなるまで次数下げをしないとイケない！

これは、どの単元でも言えることです。数学 III の極限や微分の問題によっては次数下げをしないと計算が面倒になる場合があるので、しないこともあります。基本的に分数関数が出てきて分子の方が次数が大きければ次数下げをしてから問題を考えるようにしてください。

次数下げの方法としては、分子を分母で割っていきます。

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1 \overline{)x^2} \\ \underline{x^2-x} \\ x \\ \underline{x-1} \\ 1 \end{array}$$

$x^2 = (x+1)(x-1) + 1$ となります。このことから

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

で、ここから考えていくんですけど、分数関数の問題は何通りか解き方がありますが、相加相乗平均で解ける問題が本当に多いです。ですから、分数関数の最大値、最小値の問題が出てきたときは相加相乗平均を使って解くことができないか考えるようにしてください。

相加相乗平均は、足し算の形になっていて変数をかけあわせたら変数が消えるときに使うことができます。例えば、 $x + \frac{1}{x}$ のとき、変数をかけ合わせたら $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ となり変数が消えてくれるので相加相乗平均を使っていきます。

今回の問題では、 $x-1 + \frac{1}{x+1}$ で互いにかけて合わせたら $(x-1) \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ となって変数が消えないので、相加相乗平均は使えないのかな？と思います。

でも、 $x-1 + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 2$ って式変形をしたら $(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1$ となるから相加相乗平均を使えるんじゃない？実際の大学受験では、もとの式のまま相加相乗平均を使えるものも少なくありませんが、今回の問題のように少しの式変形で相加相乗平均を使えるものも少なくありません。

ポイントとしては、足し算の形になっていて、互いにかけてあげたら変数が消えてくれるときは相加相乗平均を使って解くことができます。解き方を覚えて入れさえすればすぐに思いつける内容なので、しっかりと覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} \quad (\because x > 1 \text{ より } x > 0 \text{ より})$$

$\frac{x^2}{x-1}$ が最小となるとき $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ も最小となるので、以下 $\frac{x^2}{x-1}$ の最小値を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} &= x + 1 + \frac{1}{x-1} \quad \leftarrow \text{次数下げをした} \\ &= x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2 \end{aligned}$$

ここで $x - 1 > 0$ より、相加相乗平均を利用して

$$\begin{aligned} &\geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

等号が成立するのは $x - 1 = \frac{1}{x - 1}$ つまり $x = 2$ のとき

よって $\frac{x^2}{x-1}$ の最小値は 4 となる。

以上より、 $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ の最小値は 2 となる。

今回の問題は、実は筑波大学の数学 III の範囲で出題されたものを少しアレンジしたものです。このように数学 III の問題でも、少し工夫すると相加相乗平均で解ける問題は少なくありません。相加相乗平均は重要なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com