こんにちは、河見賢司です。

対称式なんですけど、入試には頻出ですが何となく理解している人がほとんどで、しっかりと理解している人が少ないです。そういう人のために、以前「対称式」のプリントを作りました。

ごくごく基本的なことから説明しています。対称式に自信がないという人は、まずはこちらのプリントで勉強しておいてください。
対称式のプリント：http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf
対称式のプリント（練習問題の解説）：http://www.hmg-gen.com/k-taisyousiki.pdf

今日は、対称式の問題の中でも少し難しめの問題を２問ほど解説します。

問題１

$x^3-3x^2-2x+7=0$ の３つの解を α, β, γ とする。このとき、以下の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$　(5) $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$　(6) $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6$

この問題どうやって考えるのかな？と思うけど、まあ前半の (1) から (3) は普通に解けるとして (4) から (6) は少し面倒だよね？(4) や (5) や (6)、それぞれ単独だったら普通の計算で求められないことないけど、ひとつでも面倒なんだからそれを３回もやるはずはない …

少し適当な表現ですけど、「**実際の大学受験において単に面倒なだけの問題が出題されることは本当に少ない。こうやったら解ける、それでもその解法で解くにはあまりに計算が面倒。こういうときはほとんどの場合、違った解法でもう少し簡単に解ける解法が存在する**」ということを覚えておいてください。

今回も、それにあてはまります。普通に解こうと思ったら解けないことないけど、少し面倒 … そこで、何か違った解法はないかな？と考えるんですけど、実はこの問題は自分で漸化式を作って解いていきます。初めての人はなかなか気づかないと思いますが、この解法は頻出で、過去にも慶應大学、東京大学、東京理科大学などで出題されています。難関大学を目指すという人は、ぜひとも解法を覚えておいてください。

では、漸化式の作り方を解説します。

問題を見てみたら (1) から (6) まで、全ての問題で $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の値を求めよってなっているよね。ということは $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の漸化式を作れたらいいんじゃない？

α は $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$ の解なんだから、$\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0$ っていう関係式を満たします。この両辺に α^n をかけます。

なぜ α^n をかけたかというと、これは覚えてというしかないんですけど、今は漸化式を作ろうとしているんだよね？漸化式を作るには関係式に n が含まれていないと作れないので、両辺に a^n をかけました。

$\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 7 = 0$ に α^n をかけると $\alpha^{n+3} - 3\alpha^{n+2} - 2\alpha^{n+1} + 7\alpha^n = 0$ となります。β, γ についても同じ作業をします。

$\alpha^{n+3} - 3\alpha^{n+2} - 2\alpha^{n+1} + 7\alpha^n = 0 \cdots$ ①

$\beta^{n+3} - 3\beta^{n+2} - 2\beta^{n+1} + 7\beta^n = 0 \cdots$ ②

$\gamma^{n+3} - 3\gamma^{n+2} - 2\gamma^{n+1} + 7\gamma^n = 0 \cdots$ ③

ここで、① + ② + ③ をします。

$\alpha^{n+3} + \beta^{n+3} + \gamma^{n+3} + \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} + \gamma^{n+2} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \gamma^{n+1} + \alpha^n + \beta^n + \gamma^n = 0$

で、今回は $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の漸化式を導きたんだからとりあえず $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ とします。

$\alpha^{n+3} + \beta^{n+3} + \gamma^{n+3} + \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} + \gamma^{n+2} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \gamma^{n+1} + \alpha^n + \beta^n + \gamma^n = 0$ の式を S_n で表すと、$S_{n+3} - 3S_{n+2} - 2S_{n+1} + 7S_n = 0$ ってなるんじゃない、これで漸化式が導けたよね。後は、これを使って問題を解いていくだけです。

たまに $S_{n+3} - 3S_{n+2} - 2S_{n+1} + 7S_n = 0$ の漸化式を S_n について解こうとする人がいるけど、これはもしかしたら解けるかもしれないけど、多分解けないと思います。求めるのは S_6 までなので、わざわざ S_n を求める必要はなく、ひとつずつ S_1 などを代入していけば求めることができます。

それでは、解答に進みます。もう一度、問題を書いておきます。

問題１

$x^3-3x^2-2x+7=0$ の３つの解を α, β, γ とする。このとき、以下の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$　(5) $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$　(6) $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6$

【解答】

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-7$

α は $x^3-3x^2-2x+7=0$ の解なので、$\alpha^3-3\alpha^2-2\alpha+7=0$ がいえる。この両辺に α^n をかけると $\alpha^{n+3}-3\alpha^{n+2}-2\alpha^{n+1}+7\alpha^n=0\cdots$① となる。

同様に $\beta^{n+3}-3\beta^{n+2}-2\beta^{n+1}+7\beta^n=0\cdots$②, $\gamma^{n+3}-3\gamma^{n+2}-2\gamma^{n+1}+7\gamma^n=0\cdots$③

①＋②＋③ より

$\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}+\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2}+\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1}+\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=0$

$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とする。

$S_{n+3}-3S_{n+2}-2S_{n+1}+7S_n=0$ となる。これより $S_{n+3}=3S_{n+2}+2S_{n+1}-7S_n\cdots(*)$

(1)

$$\alpha+\beta+\gamma=3$$

(2)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=3^2-2\cdot(-2)\\&=13\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=(\alpha+\beta+\gamma)\left\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}+3\alpha\beta\gamma\\&=3\cdot(13-(-2))+3\cdot(-7)\\&=24\end{aligned}$$

(4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=S_4$ より

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 &= S_4\\ &= 3S_3+2S_2-7S_1 \quad \blacktriangleleft\ (*)\text{ に } n=1 \text{ を代入した}\\ &= 3\cdot 24+2\cdot 13-7\cdot 3\\ &= 77\end{aligned}$$

(5) $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=S_5$ より

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5+\gamma^5 &= S_5\\ &= 3S_4+2S_3-7S_2 \quad \blacktriangleleft\ (*)\text{ に } n=2 \text{ を代入した}\\ &= 3\cdot 77+2\cdot 24-7\cdot 13\\ &= 188\end{aligned}$$

(6) $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=S_6$ より

$$\begin{aligned}\alpha^6+\beta^6+\gamma^6 &= S_6\\ &= 3S_5+2S_4-7S_3 \quad \blacktriangleleft\ (*)\text{ に } n=1 \text{ を代入した}\\ &= 3\cdot 188+2\cdot 77-7\cdot 24\\ &= 550\end{aligned}$$

問題文に漸化式を導けと書かれていないので、漸化式を作るということには気づかなかった人もいると思います。でも、実際の大学受験の問題では、漸化式を使って問題を解いていくこともあります。ある規則性があり、全てを求めるのは面倒そう、というときは漸化式を使えるのかな？と思えるようにしておいてください。

では、２問目に進みます。

問題２

$x^2+2x+2=0$ の２解を α, β とするとき、$\alpha^{4n+3}+\beta^{4n+3}$ を n を用いて表せ。

これも問題１と同じように漸化式をつくるのかな？って思うけど、問題１と同じように漸化式を作ると $\alpha^n+\beta^n=S_n$ としたとき、漸化式は $S_{n+2}+2S_{n+1}+2S_n=0$ となります。これは３項間の漸化式なんだから、解けないことはないように感じるけど $x^2+2x+2=0$ の解が存在しないので、普通の解き方では解けない、いろいろと考えたら解けるかもし

れないけど、どうも漸化式を解く解き方ではなさそう。

第一、漸化式が解けるんだったら S_{4n+3} を解けなんて中途半端な値を求めよとはならないよね。それなら S_n を求めよという式になるはず … ということは、S_n の漸化式は解けないけど、S_{4n+3} のときだったら、ちょうどよく計算できるのかな？と考えられます。

そこで、$\alpha^{4n+3}+\beta^{4n+3}$ を考えるんだけど、とりあえず n が入っていたら考えにくいから、n を含んでいる部分とそうでない部分を指数法則を使って外していきます。

$\alpha^{4n+3} = \alpha^{4n}\alpha^3$ ◀ 指数法則 $a^{m+n} = a^m + a^n$ より

$\quad = \left(\alpha^4\right)^n \alpha^3$ ◀ 指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ より

上記のように式変形をしたら $\alpha^{4n+3}+\beta^{4n+3} = \left(\alpha^4\right)^n\alpha^3 + \left(\beta^4\right)^n\beta^3$ となるけどとりあえず $\left(\alpha^4\right)^n$ や $\left(\alpha^4\right)^n$ の中身の α^4 や β^4 が邪魔だよね。これがなかったらなんとなく計算できそうなので、とりあえず α^4 や β^4 の値を求めてみることにします。

(注) もちろんこの段階では、α^4 の値が求まるかなんてわかんないよ。でも、求まってくれたら問題が解けそうなのでとりあえず求めることにします。どういった問題でもそうなんですが、とりあえずうまくいきそうな解法で解いてみます。それで解けたら OK だし、解けなかったら違う解法で解いていきます。

α は $x^2+2x+2=0$ の解なので $\alpha^2+2\alpha+2=0$ を満たします。このとき α^4 の値を求めるには、当然 $\alpha^4 \div (\alpha^2+2\alpha+2)$ をしてから解いていきます。

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & -2x & +2 & & \\
\cline{2-6}
x^2+2x+2 & x^4 & & & & \\
 & x^4 & +2x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & -2x^3 & -2x^2 & & \\
 & & -2x^3 & -4x^2 & -4x & \\
\cline{3-6}
 & & & 2x^2 & +4x & \\
 & & & 2x^2 & +4x & +4 \\
\cline{4-6}
 & & & & & -4
\end{array}
$$

よって、$\alpha^4 = (\alpha^2+2\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+2)-4 = -4$ ◀ $\alpha^2+2\alpha+2=0$ より これで α^4 の値が -4 と求まりました。β も α とまったく同じように計算できるので β^4 の値も -4 となります。

繰り返しになりますが、α^4 の値を計算したのはこれを計算したらうまくいきそうだと思っ

たからです。解く前にうまくいくという確証はありません。とりあえず、この計算をしたら解けそうなのでやってみた、というだけです。

$\left(\alpha^4\right)^n \alpha^3 + \left(\beta^4\right)^n \beta^3 = (-4)^n\alpha^3 + (-4)^n\beta^3$ ◀ $\alpha^4 = \beta^4 = -4$ を代入 $= (-4)^n(\alpha^3 + \beta^3)$ となります。後は $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めればいいだけなので、ごくごく簡単な対称式の問題です。それでは、解答に進みます。

【解答】
$x^2 + 2x + 2 = 0$ の 2 解が α, β なので、解と係数の関係より $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 2$ となる。

ここで、α は $x^2 + 2x + 2 = 0$ の解なので $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$ となる。

$\alpha^4 = (\alpha^2 + 2\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 2) - 4$ より、$\alpha^4 = -4$ となる。同様にして $\beta^4 = -4$ となる。

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{4n+3} + \beta^{4n+3}\\
=&(\alpha^4)^n\alpha^3 + (\beta^4)^n\beta^3\\
=&(-4)^n(\alpha^3 + \beta^3)\\
=&(-4)^n\left\{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right\}\\
=&(-4)^n\left\{(-2)^3 - 3\cdot 2\cdot(-2)\right\}\\
=&(-4)^n\cdot 4\\
=&(-1)^n\cdot 4^n\cdot 4\\
=&(-1)^n 4^{n+1}
\end{aligned}
$$
◀ これが答え

今回は、やや本格的な大学受験の問題でした。なかには難しく感じた人もいるかもしれませんが、大学受験レベルから考えればごくごく標準的な問題です。最初のうちは難しいと感じるかもしれませんが、何度も解きなおししっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com