「放物線と2接線によって囲まれる部分の面積」

こんにちは、河見賢司です。今回は、放物線の面積に関する話をしたいと思います。

基本的に面積は積分をして求めていきますが積分は計算が面倒なものが多いです。

しかし、放物線の面積には特有の性質がいくつかあり、それらを知っていると計算量を極端に減らすことができることがあります。

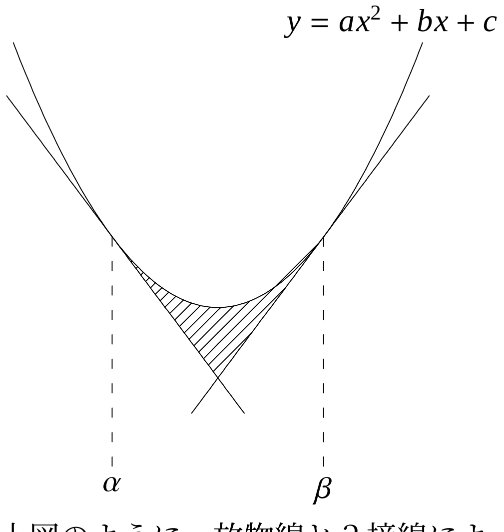
放物線の面積は、時間の限られているセンター試験で頻出ですし、また意外なことに国公立大学の2次試験で出題されることも少なくありません。

今回話す内容は、簡単なものですが、知っている人が少ないです。それだけ、知っていたらお得情報ですね。

今回は、放物線の面積の中でも放物線と2接線によって囲まれて部分の面積の求め方を解説したいと思います。

まずは、次のことを覚えてください。

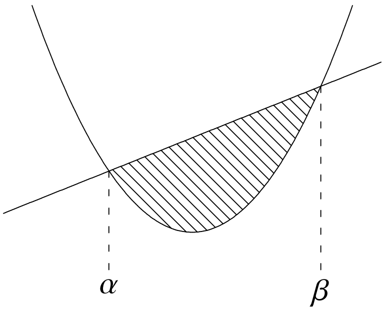
放物線と2接線によって囲まれる部分の面積



上図のように、放物線と2接線によって囲まれる部分の面積 S は、$S = \dfrac{a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となる。ただし、$a > 0$ のとき。

ちなみに $a < 0$ のときは、$S = \dfrac{-a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となります。

では、これからなぜこうなるか導いておきます。その前にこれの覚え方なんですが、以下の面積はほとんどの人が知っていると思います。



上図のようなとき、斜線部の面積 S は $S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ となる。

放物線と 2 接線によって囲まれた部分の面積が $\frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3$ であることと見比べると、放物線と 2 接線によって囲まれた部分の面積は、放物線と直線によって囲まれた部分の面積の半分になります。こう覚えたら覚えやすいと思います。それでは、証明に進みます。

【証明】
面積を求める前に、接線の方程式が必要なので接線の方程式を求めていきます。それから 2 接線の交点を求めていきます。

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると $y' = 2ax + b$
$x = \alpha$ における接線は

$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)(x - \alpha)$ ◀ 接線の公式 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ より

$y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c \cdots$ ①

同様に、$x = \beta$ における接線を求めると

$y = (2a\beta + b)x - a\beta^2 + c \cdots$ ② ◀ 当然 ① の α と β を入れ替えたものになる

次に接線の交点を求めていきます

① と ② より、y を消去して

$$(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c = (2a\beta + b)x - a\beta^2 + c$$

$$(2a\alpha - 2a\beta)x = a\alpha^2 - a\beta^2$$

$$2a(\alpha - \beta)x = a(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

⇑ これで交点が求まった。

両辺を $2a(\alpha - \beta) \neq 0$ で割ったが、不等式の両辺を変数で割るときは 0 かどうか必ず確認をする。今回は $a > 0$ と、$\alpha \neq \beta$ より、$2a(\alpha + \beta) \neq 0$ となり、割ることができます。

ちなみに放物線の接線同士の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ となります。これも有名な性質なので余力のある人は暗記しておいてください。

よって求める面積 S は、

$$S = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ax^2+bx+c-\{(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\}\right\}dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left\{ax^2+bx+c-\{(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}\right\}dx$$

ここで、インテグラルの中身が汚いので、まずインテグラルの中身を整理します。

$$ax^2 + bx + c - \{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\}$$

$$= ax^2 + bx + c - 2a\alpha x - bx + a\alpha^2 - c$$

$$= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2$$

$$= a(x^2 - 2a\alpha + \alpha^2)$$

$= a(x - \alpha)^2$ ◀ 放物線から接線を引いたものなので、当然このように 2 乗の形になります。

同様に、$ax^2 + bx + c - \{(2a\beta + b)x - a\beta^2 + c\} = a(x - \beta)^2$ となる。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ax^2 + bx + c - \{(2a\alpha + b)\,x - a\alpha^2 + c\}\right\} dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left\{ax^2 + bx + c - \{(2a\beta + b)\,x - a\beta^2 + c\}\right\} dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} a\,(x-\alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} a\,(x-\beta)^2 dx \\
&= \left[\frac{a}{3}\,(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{a}{3}\,(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \quad \blacktriangleleft \text{下の（注）を見よ} \\
&= \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 - \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^3 \\
&= \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \\
&= \frac{a}{3}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{8} + \frac{a}{3}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{8} \\
&= \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \blacktriangleleft \text{証明終了！}
\end{aligned}
$$

(注) $\displaystyle\int (x+a)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}$ が成立します。厳密にいえば数学 III の範囲ですが、数学 II でもたまに出てくるので覚えておいてください。今回の公式が成立するのは、カッコの中身の x の係数が 1 の時のみです。それ以外のときは使えないということを覚えておいてください。

これで、証明が終了しました。さっそく、この公式を使って以下の問題を解いてみてください。普通に解くよりも、格段に早く解くことができますよ。

問題

放物線 $y = x^2 + 3x + 4$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) この放物線の接線のうち (0, 0) を通るものを 2 つ求めよ。

(2) (1) で求めた 2 接線と放物線 $y = x^2 + 3x + 4$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

【解説 (1)】
接線を求めるには、とりあえず接点が必要なので接点の x 座標を $x = t$ とでも置いて解いていきます。

【解答 (1)】
接点の x 座標を t とする。

$y = x^2 + 3x + 4$ を微分すると、$y' = 2x + 3$ となるので、$x = t$ における接線は、
$y - (t^2 + 3t + 4) = (2t + 3)(x - t) \cdots$ ① となる。この接線が $(0, 0)$ を通るので、

$0 - (t^2 + 3t + 4) = (2t + 3)(0 - t)$ ◀ $y - (t^2 + 3t + 4) = (2t + 3)(x - t)$ に $(x, y) = (0, 0)$ を代入した

$-t^2 - 3t - 4 = -2t^2 - 3t$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2$

① に $t = 2$ を代入すると $y = 7x$、$t = -2$ を代入すると $y = -x$

【解説 (2)】
この問題は、先ほどの公式 $\frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3$ を使うだけです。

【解答 (2)】
求める面積 S は、$S = \frac{1}{12}(2 - (-2))^3 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$ となる。

この問題も今回解説した内容を知らなければ計算が面倒だったと思います。このように数学は知っているか知っていないかで計算量がかなり違ってくるものもあります。今後、また機会を設けては話していきますので、よろしくお願いします。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com